Les jeux combinatoires et le GDR-IM

Aline Parreau

LIRIS, CNRS, Université Lyon 1

Journées du GDR-IM, 12 mars 2019, Orléans

Aperçu de l'exposé

Jeux Combinatoires

Aperçu de l'exposé

Systèmes de numération

Automates

Langages formels

Intelligence artificielle

Jeux Combinatoires

Logique

Graphes

Complexité

Cryptographie

Aperçu de l'exposé

Systèmes de numération

Automates

Langages formels

Intelligence artificielle

Jeux Combinatoires

Logique

Graphes

Complexité

Cryptographie

Jeux combinatoires: définition

Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981

Jeux combinatoires: définition

Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981

- 2 joueurs

Echecs

Tarot

Othello

Dames

Morpion

Petits chevaux

Go

Jeux combinatoires: définition

Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981

- 2 joueurs
- Information totale, pas de hasard

Echecs

~~Tarot~~

Othello

Dames

Morpion

~~Petits chevaux~~

Go

Jeux combinatoires: définition

Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981

- 2 joueurs
- Information totale, pas de hasard
- Nombre fini de tours, pas de partie nulle


Echecs


Tarot


Othello


Dames


Morpion


Petits chevaux


Go

Jeux combinatoires: définition

Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981

- 2 joueurs
- Information totale, pas de hasard
- Nombre fini de tours, pas de partie nulle
- Vainqueur uniquement déterminé par le dernier coup (pas de score).
  Convention normale: celui qui joue le dernier coup gagne.

~~Echecs~~

~~Tarot~~

~~Othello~~

~~Dames~~

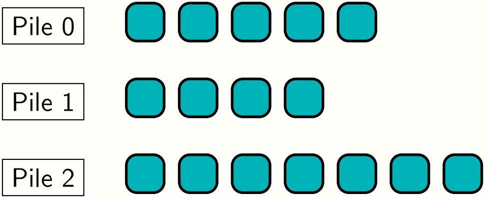
~~Morpion~~

~~Petits chevaux~~

~~Go~~

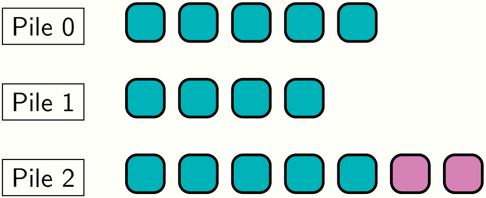
Les jeux de jetons "Taking and breaking"

Des piles de jetons. On prend des jetons dans **une seule** pile (avec des contraintes sur le nombre). Celui/celle qui ne peut plus jouer a perdu.



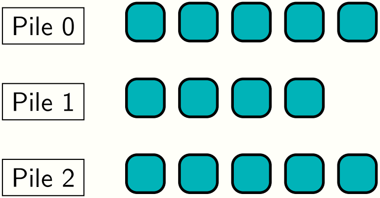
Les jeux de jetons "Taking and breaking"

Des piles de jetons. On prend des jetons dans **une seule** pile (avec des contraintes sur le nombre). Celui/celle qui ne peut plus jouer a perdu.



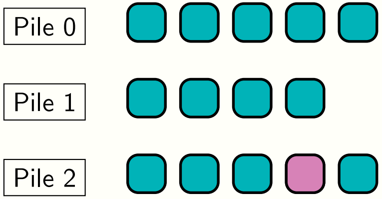
Les jeux de jetons "Taking and breaking"

Des piles de jetons. On prend des jetons dans **une seule** pile (avec des contraintes sur le nombre). Celui/celle qui ne peut plus jouer a perdu.



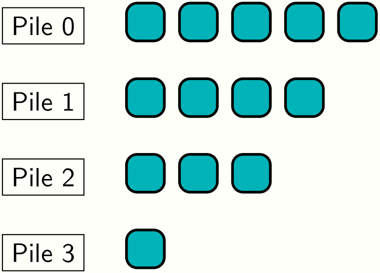
Les jeux de jetons "Taking and breaking"

Des piles de jetons. On prend des jetons dans **une seule** pile (avec des contraintes sur le nombre). Celui/celle qui ne peut plus jouer a perdu.



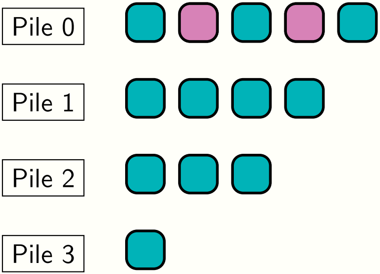
Les jeux de jetons "Taking and breaking"

Des piles de jetons. On prend des jetons dans **une seule** pile (avec des contraintes sur le nombre). Celui/celle qui ne peut plus jouer a perdu.



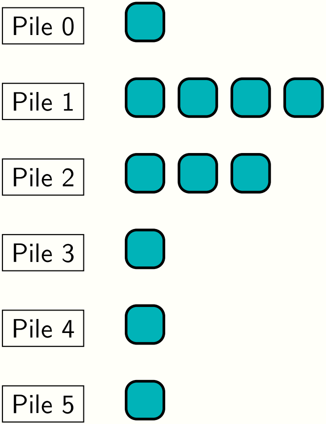
Les jeux de jetons “Taking and breaking”

Des piles de jetons. On prend des jetons dans **une seule** pile (avec des contraintes sur le nombre). Celui/celle qui ne peut plus jouer a perdu.



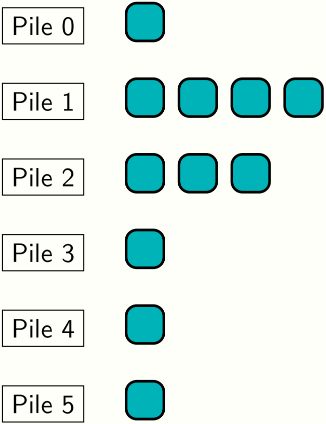
Les jeux de jetons “Taking and breaking”

Des piles de jetons. On prend des jetons dans **une seule** pile (avec des contraintes sur le nombre). Celui/celle qui ne peut plus jouer a perdu.



Les jeux de jetons “Taking and breaking”

Des piles de jetons. On prend des jetons dans **une seule** pile (avec des contraintes sur le nombre). Celui/celle qui ne peut plus jouer a perdu.



Exemples: Jeu de NIM, jeu des allumettes,...

Jeux de soustraction

$\rightarrow$ On ne peut pas séparer les piles

Jeu de soustraction sur $S \subseteq \mathbb{N}$:

- A tour de rôle, les deux joueurs retirent k jetons de la pile, avec $k \in S$, sans casser la pile.
- Celui qui ne peut plus jouer perd la partie.

Exemple : $S = \{1, 2, 4\}$

Jeux de soustraction

$\rightarrow$ On ne peut pas séparer les piles

Jeu de soustraction sur $S \subseteq \mathbb{N}$:

- A tour de rôle, les deux joueurs retirent k jetons de la pile, avec $k \in S$, sans casser la pile.
- Celui qui ne peut plus jouer perd la partie.

Exemple : $S = \{1, 2, 4\}$

Jeux de soustraction

$\rightarrow$ On ne peut pas séparer les piles

Jeu de soustraction sur $S \subseteq \mathbb{N}$:

- A tour de rôle, les deux joueurs retirent k jetons de la pile, avec $k \in S$, sans casser la pile.
- Celui qui ne peut plus jouer perd la partie.

Exemple : $S = \{1, 2, 4\}$

Jeux de soustraction

$\rightarrow$ On ne peut pas séparer les piles

Jeu de soustraction sur $S \subseteq \mathbb{N}$:

- A tour de rôle, les deux joueurs retirent k jetons de la pile, avec $k \in S$, sans casser la pile.
- Celui qui ne peut plus jouer perd la partie.

Exemple : $S = \{1, 2, 4\}$

Jeux de soustraction

$\rightarrow$ On ne peut pas séparer les piles

Jeu de soustraction sur $S \subseteq \mathbb{N}$:

- A tour de rôle, les deux joueurs retirent k jetons de la pile, avec $k \in S$, sans casser la pile.
- Celui qui ne peut plus jouer perd la partie.

Exemple : $S = \{1, 2, 4\}$

Jeux de soustraction

$\rightarrow$ On ne peut pas séparer les piles

Jeu de soustraction sur $S \subseteq \mathbb{N}$:

- A tour de rôle, les deux joueurs retirent k jetons de la pile, avec $k \in S$, sans casser la pile.
- Celui qui ne peut plus jouer perd la partie.

Exemple : $S = \{1, 2, 4\}$

Jeux de soustraction

$\rightarrow$ On ne peut pas séparer les piles

Jeu de soustraction sur $S \subseteq \mathbb{N}$:

- A tour de rôle, les deux joueurs retirent k jetons de la pile, avec $k \in S$, sans casser la pile.
- Celui qui ne peut plus jouer perd la partie.

Exemple : $S = \{1, 2, 4\}$

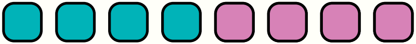
Jeux de soustraction

$\rightarrow$ On ne peut pas séparer les piles

Jeu de soustraction sur $S \subseteq \mathbb{N}$:

- A tour de rôle, les deux joueurs retirent k jetons de la pile, avec $k \in S$, sans casser la pile.
- Celui qui ne peut plus jouer perd la partie.

Exemple : $S = \{1, 2, 4\}$



Jeux de soustraction

$\rightarrow$ On ne peut pas séparer les piles

Jeu de soustraction sur $S \subseteq \mathbb{N}$:

- A tour de rôle, les deux joueurs retirent k jetons de la pile, avec $k \in S$, sans casser la pile.
- Celui qui ne peut plus jouer perd la partie.

Exemple : $S = \{1, 2, 4\}$

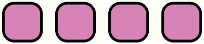
Jeux de soustraction

$\rightarrow$ On ne peut pas séparer les piles

Jeu de soustraction sur $S \subseteq \mathbb{N}$:

- A tour de rôle, les deux joueurs retirent k jetons de la pile, avec $k \in S$, sans casser la pile.
- Celui qui ne peut plus jouer perd la partie.

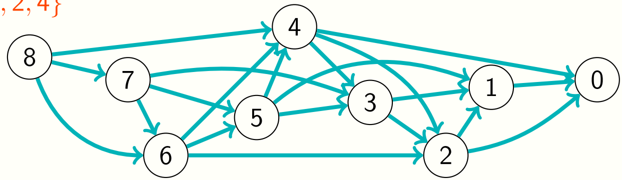
Exemple : $S = \{1, 2, 4\}$



Stratégie gagnante

Tout jeu combinatoire peut être représenté par un DAG fini.

$S = \{1, 2, 4\}$

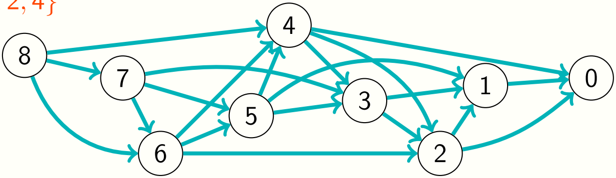


- Jouer au jeu $\Leftrightarrow$ déplacer un jeton suivant les arcs

Stratégie gagnante

Tout jeu combinatoire peut être représenté par un DAG fini.

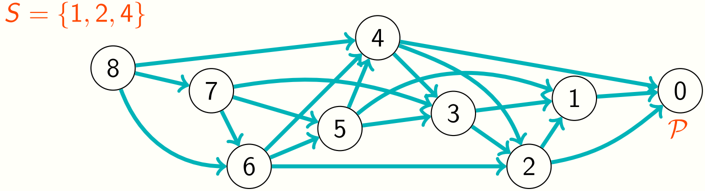
$S = \{1, 2, 4\}$



- Jouer au jeu $\Leftrightarrow$ déplacer un jeton suivant les arcs
- En remontant le DAG, on peut déterminer qui gagne
  - $\mathcal{N}$ si le premier (next) joueur peut forcer la victoire,
  - $\mathcal{P}$ si le second (previous) joueur peut forcer la victoire.

Stratégie gagnante

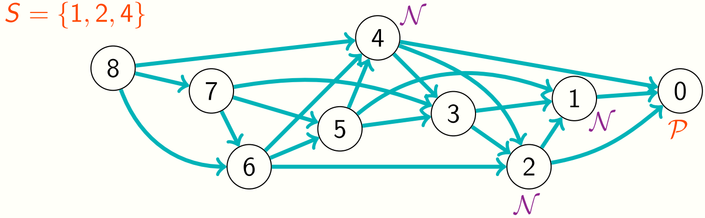
Tout jeu combinatoire peut être représenté par un DAG fini.



- Jouer au jeu $\Leftrightarrow$ déplacer un jeton suivant les arcs
- En remontant le DAG, on peut déterminer qui gagne
  - $\mathcal{N}$ si le premier (next) joueur peut forcer la victoire,
  - $\mathcal{P}$ si le second (previous) joueur peut forcer la victoire.

Stratégie gagnante

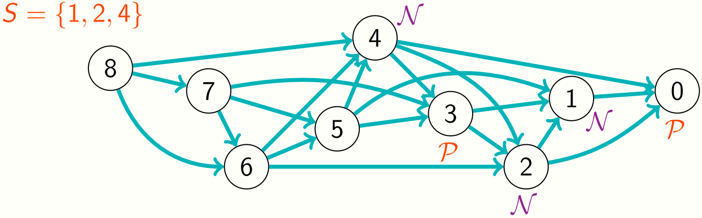
Tout jeu combinatoire peut être représenté par un DAG fini.



- Jouer au jeu $\Leftrightarrow$ déplacer un jeton suivant les arcs
- En remontant le DAG, on peut déterminer qui gagne
  - $\mathcal{N}$ si le premier (next) joueur peut forcer la victoire,
  - $\mathcal{P}$ si le second (previous) joueur peut forcer la victoire.

Stratégie gagnante

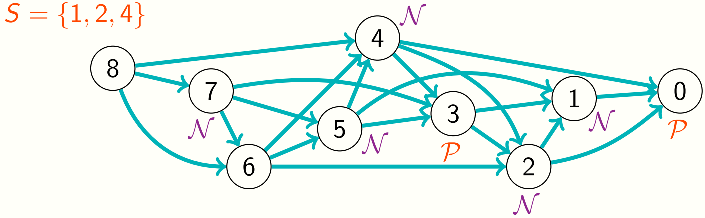
Tout jeu combinatoire peut être représenté par un DAG fini.



- Jouer au jeu $\Leftrightarrow$ déplacer un jeton suivant les arcs
- En remontant le DAG, on peut déterminer qui gagne
  - $\mathcal{N}$ si le premier (next) joueur peut forcer la victoire,
  - $\mathcal{P}$ si le second (previous) joueur peut forcer la victoire.

Stratégie gagnante

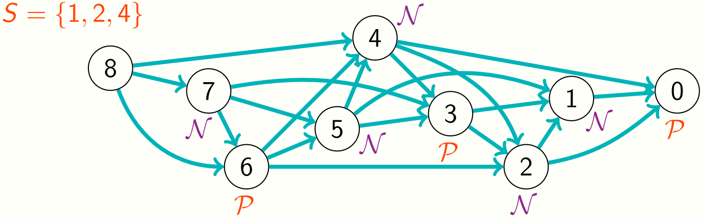
Tout jeu combinatoire peut être représenté par un DAG fini.



- Jouer au jeu $\Leftrightarrow$ déplacer un jeton suivant les arcs
- En remontant le DAG, on peut déterminer qui gagne
  - $\mathcal{N}$ si le premier (next) joueur peut forcer la victoire,
  - $\mathcal{P}$ si le second (previous) joueur peut forcer la victoire.

Stratégie gagnante

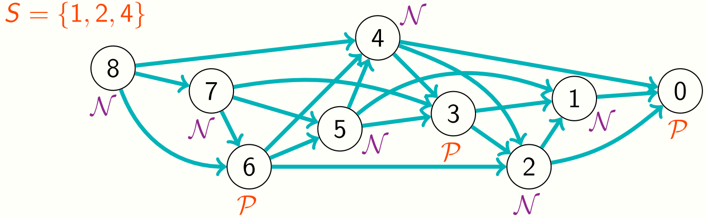
Tout jeu combinatoire peut être représenté par un DAG fini.



- Jouer au jeu $\Leftrightarrow$ déplacer un jeton suivant les arcs
- En remontant le DAG, on peut déterminer qui gagne
  - $\mathcal{N}$ si le premier (next) joueur peut forcer la victoire,
  - $\mathcal{P}$ si le second (previous) joueur peut forcer la victoire.

Stratégie gagnante

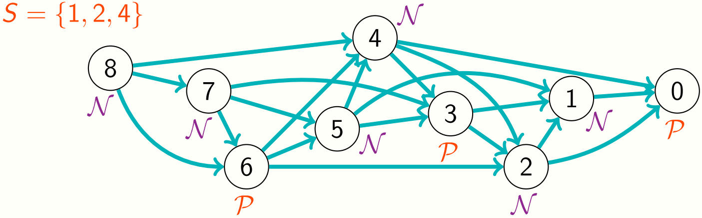
Tout jeu combinatoire peut être représenté par un DAG fini.



- Jouer au jeu $\Leftrightarrow$ déplacer un jeton suivant les arcs
- En remontant le DAG, on peut déterminer qui gagne
  - $\mathcal{N}$ si le premier (next) joueur peut forcer la victoire,
  - $\mathcal{P}$ si le second (previous) joueur peut forcer la victoire.

Stratégie gagnante

Tout jeu combinatoire peut être représenté par un DAG fini.



- Jouer au jeu $\Leftrightarrow$ déplacer un jeton suivant les arcs
- En remontant le DAG, on peut déterminer qui gagne
  - $\mathcal{N}$ si le premier (next) joueur peut forcer la victoire,
  - $\mathcal{P}$ si le second (previous) joueur peut forcer la victoire.

Théorème

Un des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Problématique centrale

Issue du jeu

Entrée : Position de jeu
Sortie : Gagnant pour le premier joueur ($\mathcal{N}$) ou le deuxième ($\mathcal{P}$) ?

Stratégie gagnante

Entrée : Position de jeu
Sortie : Si le jeu est $\mathcal{N}$, un coup gagnant.

Problématique centrale

Issue du jeu

Entrée : Position de jeu
Sortie : Gagnant pour le premier joueur ($\mathcal{N}$) ou le deuxième ($\mathcal{P}$) ?

Stratégie gagnante

Entrée : Position de jeu
Sortie : Si le jeu est $\mathcal{N}$, un coup gagnant.

Ces deux problèmes sont décidables en utilisant le DAG...

Problématique centrale

Issue du jeu

Entrée : Position de jeu
Sortie : Gagnant pour le premier joueur ($\mathcal{N}$) ou le deuxième ($\mathcal{P}$) ?

Stratégie gagnante

Entrée : Position de jeu
Sortie : Si le jeu est $\mathcal{N}$, un coup gagnant.

Ces deux problèmes sont décidables en utilisant le DAG... mais taille du DAG souvent exponentiel...

Très souvent dans PSPACE

La classe PSPACE et les jeux

Quantified Boolean Formula (QBF)

Entrée : $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \Phi(x_1, \ldots, x_n)$: $Q_i \in \{\forall, \exists\}$
Sortie : La formule est-elle vraie ?

La classe PSPACE et les jeux

Quantified Boolean Formula (QBF)

Entrée : $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \Phi(x_1, \dots, x_n)$: $Q_i \in \{\forall, \exists\}$
Sortie : La formule est-elle vraie ?

Description d'une stratégie gagnante ?
"Il existe un coup pour J1, tel que, pour tout coup de J2, il existe un coup de J1..."

La classe PSPACE et les jeux

Quantified Boolean Formula (QBF)

Entrée : $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \Phi(x_1, \dots, x_n)$: $Q_i \in \{\forall, \exists\}$
Sortie : La formule est-elle vraie ?

Description d'une stratégie gagnante ?
"Il existe un coup pour J1, tel que, pour tout coup de J2, il existe un coup de J1..."

QBF-game :

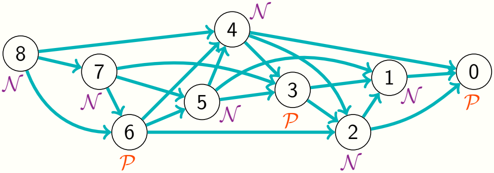
- Plateau : formule logique $\Phi(x_1, \dots, x_n)$
- Les joueurs mettent x_1,...,x_n à vrai ou faux en suivant cet ordre.
- Le premier joueur gagne ssi la formule finale est vraie

Théorème Schaeffer, 1989 et Arora et Barak, 2009

Savoir s'il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur à QBF-game est PSPACE-complet

Polynomialité pour certains jeux

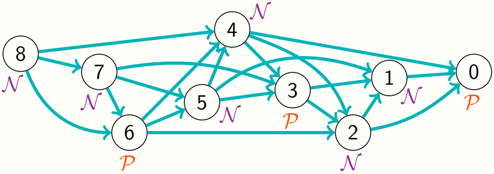
Retour sur le jeu de soustraction $S = \{1, 2, 4\}$ sur n jetons.



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
issue	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$

Polynomialité pour certains jeux

Retour sur le jeu de soustraction $S = \{1, 2, 4\}$ sur n jetons.

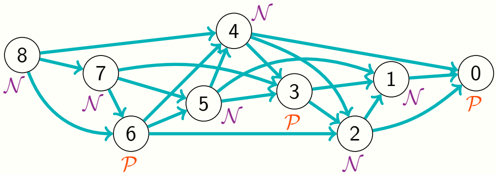


n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
issue	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$

Une position n est $\mathcal{P}$ si et seulement si $n \equiv 0 \bmod 3$.

Polynomialité pour certains jeux

Retour sur le jeu de soustraction $S = \{1, 2, 4\}$ sur n jetons.



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
issue	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$

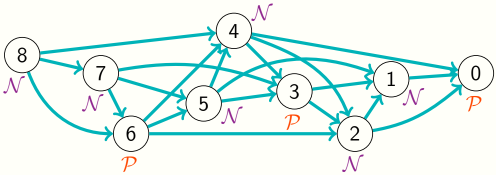
Une position n est $\mathcal{P}$ si et seulement si $n \equiv 0 \bmod 3$.

Proposition

Tout jeu de soustraction fini a sa séquence d'issues ultimement périodique.

Polynomialité pour certains jeux

Retour sur le jeu de soustraction $S = \{1, 2, 4\}$ sur n jetons.



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
issue	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$

Une position n est $\mathcal{P}$ si et seulement si $n \equiv 0 \bmod 3$.

Proposition

Tout jeu de soustraction fini a sa séquence d'issues ultimement périodique.

Question ouverte

Taille de la prépériode et de la période en fonction de S ?

Et si on peut séparer les piles en 2 ?

Jeux octaux

- Règles données par un code octal $d_0 \cdot d_1 d_2 \ldots$.
- $d_i \in \{0, .., 7\}$ indique les actions possibles quand on retire i jetons parmi:
  1. Vider une pile
  2. Enlever des jetons d'une pile sans la vider
  3. Enlever des jetons d'une pile et la séparer en 2
- Le premier joueur bloqué perd.

Et si on peut séparer les piles en 2 ?

Jeux octaux

- Règles données par un code octal $d_0 \cdot d_1 d_2 ....$
- $d_i \in \{0, .., 7\}$ indique les actions possibles quand on retire i jetons parmi:
  1. Vider une pile
  2. Enlever des jetons d'une pile sans la vider
  3. Enlever des jetons d'une pile et la séparer en 2
- Le premier joueur bloqué perd.

Exemple : Le jeu 0.07 où les joueurs peuvent prendre 2 jetons dans une pile en séparant éventuellement la pile ou en la vidant.

Et si on peut séparer les piles en 2 ?

Jeux octaux

- Règles données par un code octal $d_0 \cdot d_1 d_2 \ldots$.
- $d_i \in \{0, .., 7\}$ indique les actions possibles quand on retire i jetons parmi:
  1. Vider une pile
  2. Enlever des jetons d'une pile sans la vider
  3. Enlever des jetons d'une pile et la séparer en 2
- Le premier joueur bloqué perd.

Exemple : Le jeu 0.07 où les joueurs peuvent prendre 2 jetons dans une pile en séparant éventuellement la pile ou en la vidant.

Et si on peut séparer les piles en 2 ?

Jeux octaux

- Règles données par un code octal $d_0 \cdot d_1 d_2 \ldots$.
- $d_i \in \{0, .., 7\}$ indique les actions possibles quand on retire i jetons parmi:
  1. Vider une pile
  2. Enlever des jetons d'une pile sans la vider
  3. Enlever des jetons d'une pile et la séparer en 2
- Le premier joueur bloqué perd.

Exemple : Le jeu 0.07 où les joueurs peuvent prendre 2 jetons dans une pile en séparant éventuellement la pile ou en la vidant.

Et si on peut séparer les piles en 2 ?

Jeux octaux

- Règles données par un code octal $d_0 \cdot d_1 d_2 \ldots$.
- $d_i \in \{0, .., 7\}$ indique les actions possibles quand on retire i jetons parmi:
  1. Vider une pile
  2. Enlever des jetons d'une pile sans la vider
  3. Enlever des jetons d'une pile et la séparer en 2
- Le premier joueur bloqué perd.

Exemple : Le jeu 0.07 où les joueurs peuvent prendre 2 jetons dans une pile en séparant éventuellement la pile ou en la vidant.

Et si on peut séparer les piles en 2 ?

Jeux octaux

- Règles données par un code octal $d_0 \cdot d_1 d_2 ....$
- $d_i \in \{0, .., 7\}$ indique les actions possibles quand on retire i jetons parmi:
  1. Vider une pile
  2. Enlever des jetons d'une pile sans la vider
  3. Enlever des jetons d'une pile et la séparer en 2
- Le premier joueur bloqué perd.

Exemple : Le jeu 0.07 où les joueurs peuvent prendre 2 jetons dans une pile en séparant éventuellement la pile ou en la vidant.

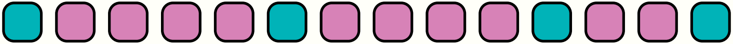
Et si on peut séparer les piles en 2 ?

Jeux octaux

- Règles données par un code octal $d_0 \cdot d_1 d_2 \ldots$.
- $d_i \in \{0, .., 7\}$ indique les actions possibles quand on retire i jetons parmi:
  1. Vider une pile
  2. Enlever des jetons d'une pile sans la vider
  3. Enlever des jetons d'une pile et la séparer en 2
- Le premier joueur bloqué perd.

Exemple : Le jeu 0.07 où les joueurs peuvent prendre 2 jetons dans une pile en séparant éventuellement la pile ou en la vidant.

$\rightarrow$ Nombre exponentiel de positions de jeu. Comment simplifier ?



Et si on peut séparer les piles en 2 ?

Jeux octaux

- Règles données par un code octal $d_0 \cdot d_1 d_2 \ldots$.
- $d_i \in \{0, .., 7\}$ indique les actions possibles quand on retire i jetons parmi:
  1. Vider une pile
  2. Enlever des jetons d'une pile sans la vider
  3. Enlever des jetons d'une pile et la séparer en 2
- Le premier joueur bloqué perd.

Exemple : Le jeu 0.07 où les joueurs peuvent prendre 2 jetons dans une pile en séparant éventuellement la pile ou en la vidant.
$\rightarrow$ Nombre exponentiel de positions de jeu. Comment simplifier ?

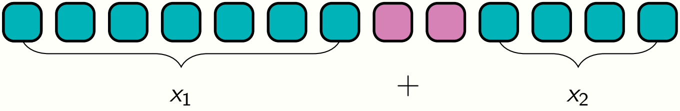
Et si on peut séparer les piles en 2 ?

Jeux octaux

- Règles données par un code octal $d_0 \cdot d_1 d_2 \ldots$.
- $d_i \in \{0, .., 7\}$ indique les actions possibles quand on retire i jetons parmi:
  1. Vider une pile
  2. Enlever des jetons d'une pile sans la vider
  3. Enlever des jetons d'une pile et la séparer en 2
- Le premier joueur bloqué perd.

Exemple : Le jeu 0.07 où les joueurs peuvent prendre 2 jetons dans une pile en séparant éventuellement la pile ou en la vidant.

$\rightarrow$ Nombre exponentiel de positions de jeu. Comment simplifier ?



$+$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{N}$

Valeurs de Grundy

Soit $I \subset \mathbb{N}$. MeX (minimum excluded value) de $I = \min \mathbb{N} \setminus I$.

$$\mathrm{MeX}\{0,1,3,5\} = 2, \quad \mathrm{MeX}\{2,3,6\} = 0, \quad \mathrm{MeX}\emptyset = 0.$$

Valeurs de Grundy

Soit $I \subset \mathbb{N}$. MeX (minimum excluded value) de $I = \min \mathbb{N} \setminus I$.

$$\mathrm{MeX}\{0,1,3,5\} = 2, \quad \mathrm{MeX}\{2,3,6\} = 0, \quad \mathrm{MeX}\emptyset = 0.$$

La *valeur de Grundy* d'une position x est donnée par

$$\mathcal{G}(x) = \mathrm{MeX}(\mathcal{G}(N^+(x)))$$

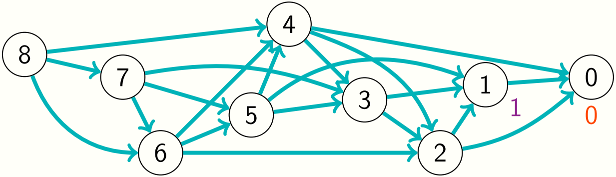
Valeurs de Grundy

Soit $I \subset \mathbb{N}$. MeX (minimum excluded value) de $I = \min \mathbb{N} \setminus I$.

$$\mathrm{MeX}\{0,1,3,5\} = 2, \quad \mathrm{MeX}\{2,3,6\} = 0, \quad \mathrm{MeX}\emptyset = 0.$$

La *valeur de Grundy* d'une position x est donnée par

$$\mathcal{G}(x) = \mathrm{MeX}(\mathcal{G}(N^+(x)))$$



Proposition

$\mathcal{G}(x) = 0$ si et seulement si x est $\mathcal{P}$.

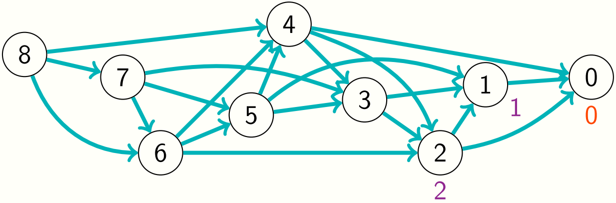
Valeurs de Grundy

Soit $I \subset \mathbb{N}$. MeX (minimum excluded value) de $I = \min \mathbb{N} \setminus I$.

$$\mathrm{MeX}\{0,1,3,5\} = 2, \quad \mathrm{MeX}\{2,3,6\} = 0, \quad \mathrm{MeX}\emptyset = 0.$$

La *valeur de Grundy* d'une position x est donnée par

$$\mathcal{G}(x) = \mathrm{MeX}(\mathcal{G}(N^+(x)))$$



Proposition

$\mathcal{G}(x) = 0$ si et seulement si x est $\mathcal{P}$.

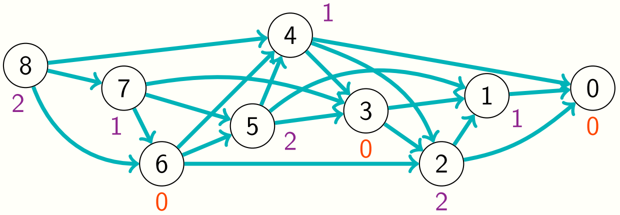
Valeurs de Grundy

Soit $I \subset \mathbb{N}$. MeX (minimum excluded value) de $I = \min \mathbb{N} \setminus I$.

$$\text{MeX}\{0,1,3,5\} = 2, \quad \text{MeX}\{2,3,6\} = 0, \quad \text{MeX}\emptyset = 0.$$

La *valeur de Grundy* d'une position x est donnée par

$$\mathcal{G}(x) = \text{MeX}(\mathcal{G}(N^+(x)))$$



Proposition

$\mathcal{G}(x) = 0$ si et seulement si x est $\mathcal{P}$.

Valeur de Grundy de la somme de jeux

$+$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{N}$

Valeur de Grundy de la somme de jeux

$+$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{N}$

Théorème Sprague–Grundy

Soit x_1 et x_2 deux positions de jeu. La position somme $x_1 + x_2$ a pour valeur de Grundy

$$\mathcal{G}(x_1 + x_2) = \mathcal{G}(x_1) \oplus \mathcal{G}(x_2).$$

Valeur de Grundy de la somme de jeux

$+$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{N}$

Théorème Sprague–Grundy

Soit x_1 et x_2 deux positions de jeu. La position somme $x_1 + x_2$ a pour valeur de Grundy

$$\mathcal{G}(x_1 + x_2) = \mathcal{G}(x_1) \oplus \mathcal{G}(x_2).$$

Corollaire

Soit x_1 et x_2 deux positions de jeu. La position somme $x_1 + x_2$ est $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{G}(x_1) = \mathcal{G}(x_2)$.

Sequence de Grundy

Séquence de Grundy: suite des valeurs de Grundy sur 1,2,3,..., n jetons.
Pour le jeu de soustraction $\{1, 2, 4\}$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{G}(n)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

Sequence de Grundy

Séquence de Grundy: suite des valeurs de Grundy sur 1,2,3,..., n jetons.
Pour le jeu de soustraction $\{1, 2, 4\}$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{G}(n)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

Théorème Berlekamp, Conway, Guy

Les jeux de soustraction finis ont une séquence de Grundy ultimement périodique.

Sequence de Grundy

Séquence de Grundy: suite des valeurs de Grundy sur 1,2,3,..., n jetons.

Pour le jeu de soustraction $\{1, 2, 4\}$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{G}(n)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

Théorème Berlekamp, Conway, Guy

Les jeux de soustraction finis ont une séquence de Grundy ultimement périodique.

Pour le jeu octal 0.07

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2

Sequence de Grundy

Séquence de Grundy: suite des valeurs de Grundy sur 1,2,3,..., n jetons.
Pour le jeu de soustraction $\{1, 2, 4\}$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{G}(n)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

Théorème Berlekamp, Conway, Guy

Les jeux de soustraction finis ont une séquence de Grundy ultimement périodique.

Pour le jeu octal 0.07

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{G}(n)$	0	0	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2

Théorème Guy, Smith, 1956

La séquence de Grundy de 0.07 est ultimement périodique, de période 34, et de prépériode 53

Conjecture de Guy

Conjecture Guy, 1956

La séquence de Grundy d'un jeu octal fini est ultimement périodique.

Conjecture de Guy

Conjecture Guy, 1956

La séquence de Grundy d'un jeu octal fini est ultimement périodique.

- Pour le jeu 0.106, la séquence de Grundy est ultimement périodique, de période 328226140474, et de prépériode 465384263797.

Conjecture de Guy

Conjecture Guy, 1956

La séquence de Grundy d'un jeu octal fini est ultimement périodique.

- Pour le jeu 0.106, la séquence de Grundy est ultimement périodique, de période 328226140474, et de prépériode 465384263797.
- La séquence de Grundy du jeu 0.007 (James Bond Game) est conjecturée périodique ? (testé jusqu'à 2^{28})

Conjecture de Guy

Conjecture Guy, 1956

La séquence de Grundy d'un jeu octal fini est ultimement périodique.

- Pour le jeu 0.106, la séquence de Grundy est ultimement périodique, de période 328226140474, et de prépériode 465384263797.
- La séquence de Grundy du jeu 0.007 (James Bond Game) est conjecturée périodique ? (testé jusqu'à 2^{28})
- C'est ouvert pour des jeux très simples comme 0.6 !

Comment étendre ces résultats ?

Systèmes de numération

Automates

Langages formels

Intelligence artificielle

Jeux Combinatoires

Logique

Graphes

Complexité

Cryptographie

Comment étendre ces résultats ?

Systèmes de numération

Automates

Langages formels

Intelligence artificielle

Jeux Combinatoires

Logique

Graphes

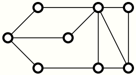
Complexité

Cryptographie

Extension 1: enrichir la structure

Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin

Extension 1: enrichir la structure

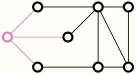


Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

Extension 1: enrichir la structure

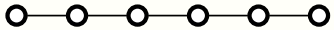
Jouer sur une pile $\sim$

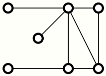
Jouer sur un chemin $\sim$



Jouer sur un graphe

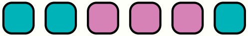
Extension 1: enrichir la structure





Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

Extension 1: enrichir la structure

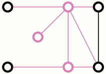


Jouer sur une pile

$\sim$

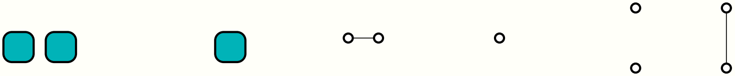
Jouer sur un chemin

$\sim$



Jouer sur un graphe

Extension 1: enrichir la structure

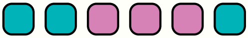


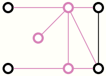
Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

Deux questions:

- Comment étendre la définition ?

Extension 1: enrichir la structure





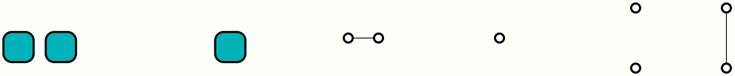
Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

Deux questions:

- Comment étendre la définition ?
  [Beaudou, Coupechoux, Dailly, Gravier, Moncel, P., Sopena, 2018]
  - Prise de sommets connectés
  - Diviser le tas en 2 $\Leftrightarrow$ déconnecter le graphe

  Généralise des jeux sur les graphes comme ARC-KAYLES (0.07)

Extension 1: enrichir la structure



Jouer sur une pile $\sim$ Jouer sur un chemin $\sim$ Jouer sur un graphe

Deux questions:

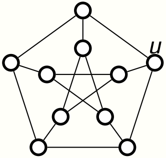
- Comment étendre la définition ?
  [Beaudou, Coupechoux, Dailly, Gravier, Moncel, P., Sopena, 2018]
  - Prise de sommets connectés
  - Diviser le tas en 2 $\Leftrightarrow$ déconnecter le graphe

  Généralise des jeux sur les graphes comme Arc-Kayles (0.07)
- Comment étendre la notion de périodicité ?

Périodicité ?

Idée : On fixe un sommet et on lui ajoute un chemin de longueur k.

$$G \underset{\mathrm{u}}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$$

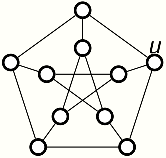


Question: Comment évolue la suite de Grundy $(\mathcal{G}(G \underset{\mathrm{u}}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k))_{k\in\mathbb{N}}$?

- Pertinent pour les arbres
- Approche utilisée pour Arc Kayles

Périodicité ?

Idée : On fixe un sommet et on lui ajoute un chemin de longueur k.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$  $(k = 0)$

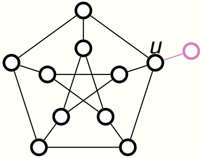
Question: Comment évolue la suite de Grundy $(\mathcal{G}(G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k))_{k \in \mathbb{N}}$?

- Pertinent pour les arbres
- Approche utilisée pour Arc Kayles

Périodicité ?

Idée : On fixe un sommet et on lui ajoute un chemin de longueur k.

$G \underset{\mathbf{u}}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$



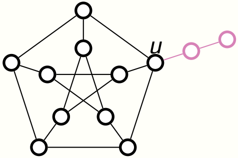
$(k = 1)$

Question: Comment évolue la suite de Grundy $(\mathcal{G}(G \underset{\mathbf{u}}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k))_{k \in \mathbb{N}}$?

- Pertinent pour les arbres
- Approche utilisée pour Arc Kayles

Périodicité ?

Idée : On fixe un sommet et on lui ajoute un chemin de longueur k.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$ 

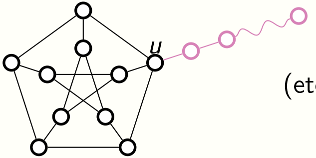
$(k = 2)$

Question: Comment évolue la suite de Grundy $(\mathcal{G}(G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k))_{k \in \mathbb{N}}$?

- Pertinent pour les arbres
- Approche utilisée pour Arc Kayles

Périodicité ?

Idée : On fixe un sommet et on lui ajoute un chemin de longueur k.

$G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k =$ 

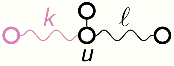
(etc)

Question: Comment évolue la suite de Grundy $(\mathcal{G}(G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k))_{k\in\mathbb{N}}$?

- Pertinent pour les arbres
- Approche utilisée pour ARC KAYLES

Arc Kayles (0.07)

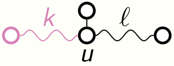
- Les joueurs prennent alternativement deux sommets connectés ($\Leftrightarrow$ une arête)
- Sur un chemin $\Leftrightarrow$ 0.07 : prépériode 53, période 34
- Etudié sur un chemin avec un sommet pendant [Huggan et Stevens, 2016]



  - ▶ Ultime périodicité conjecturée

Arc Kayles (0.07)

- Les joueurs prennent alternativement deux sommets connectés ($\Leftrightarrow$ une arête)
- Sur un chemin $\Leftrightarrow$ 0.07 : prépériode 53, période 34
- Etudié sur un chemin avec un sommet pendant
  [Huggan et Stevens, 2016]



  - Ultime périodicité conjecturée

Question ouverte

Est-ce qu'Arc-Kayles est PSPACE-complet ?

Sur les jeux de soustraction

- La périodicité générale s'étend :

Théorème Dailly, Moncel, P., 2018+

Si $S \subseteq \mathbb{N}$ est fini, alors pour tous G et u la séquence $(\mathcal{G}(G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k))_{k\in\mathbb{N}}$ pour le jeu de soustraction avec S est ultimement périodique.

Sur les jeux de soustraction

- La périodicité générale s'étend :

Théorème Dailly, Moncel, P., 2018+

Si $S \subseteq \mathbb{N}$ est fini, alors pour tous G et u la séquence $(\mathcal{G}(G \underset{u}{\bullet}\!\!-\!\!\bullet P_k))_{k\in\mathbb{N}}$ pour le jeu de soustraction avec S est ultimement périodique.

  - Période ? Prépériode ?

Sur les jeux de soustraction

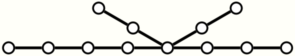
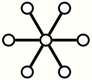
- La périodicité générale s'étend :

Théorème Dailly, Moncel, P., 2018+

Si $S \subseteq \mathbb{N}$ est fini, alors pour tous G et u la séquence $(\mathcal{G}(G \underset{u}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} P_k))_{k\in\mathbb{N}}$ pour le jeu de soustraction avec S est ultimement périodique.

  - Période ? Prépériode ?

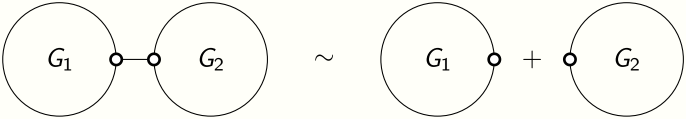
- Etude sur des arbres avec un seul sommet de degré ≥ 3 (étoiles subdivisées)

  - Avec $S = \{1, 2\}$ ou $S = \{1, 2, 3\}$: périodicité sans prépériode
  - Avec $S = \{1, ..., N\}$: période $N + 1$ pour les étoiles simples et les chemins avec un sommet pendant.

Passage aux arbres plus complexes ?

- Jonction de deux graphes ?

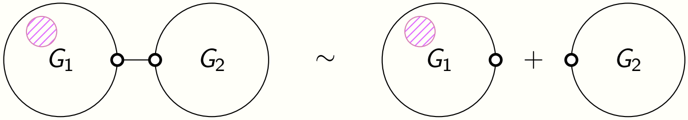


Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

Passage aux arbres plus complexes ?

- Jonction de deux graphes ?

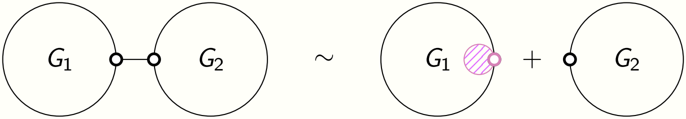


Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

Passage aux arbres plus complexes ?

- Jonction de deux graphes ?



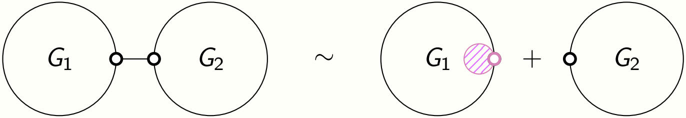
Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

Passage aux arbres plus complexes ?

- Jonction de deux graphes ?

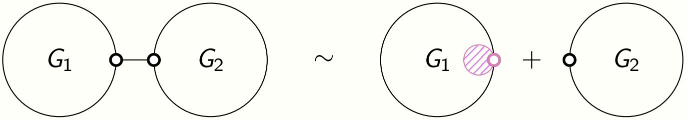


Jouer sur le graphe — Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

Passage aux arbres plus complexes ?

- Jonction de deux graphes ?



Jouer sur le graphe — Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

→ Modification de la somme de pour la jonction de deux étoiles subdivisées, pour le jeu $S = \{1, 2\}$ [BCD+18]

Extension 2

Systèmes de numération

Automates

Langages formels

Intelligence artificielle

Jeux Combinatoires

Logique

Graphes

Complexité

Cryptographie

Extension 2

Systèmes de numération

Automates

Langages formels

Intelligence artificielle

Jeux Combinatoires

Logique

Graphes

Complexité

Cryptographie

Extension 2: jeux de réécriture

Jeux de réécriture (Waldmann, 2002) :

- Système de réécriture (terminal)
- Partant d'un mot `t`, les joueurs appliquent alternativement des règles sur le mot.
- Celui qui ne peut plus appliquer de règle perd.

Exemple : R_1 : $\texttt{ab} \to \varepsilon$, R_2 : $\texttt{aaa} \to \texttt{b}$ et $t = \texttt{aabbbaabaaa}$

Extension 2: jeux de réécriture

Jeux de réécriture (Waldmann, 2002) :

- Système de réécriture (terminal)
- Partant d'un mot t, les joueurs appliquent alternativement des règles sur le mot.
- Celui qui ne peut plus appliquer de règle perd.

Exemple : R_1 : $\mathtt{ab} \rightarrow \varepsilon$, R_2 : $\mathtt{aaa} \rightarrow \mathtt{b}$ et $t = \mathtt{aabbbaabaaa}$

aabbbaabaaa

Extension 2: jeux de réécriture

Jeux de réécriture (Waldmann, 2002) :

- Système de réécriture (terminal)
- Partant d'un mot `t`, les joueurs appliquent alternativement des règles sur le mot.
- Celui qui ne peut plus appliquer de règle perd.

Exemple : R_1 : $\mathtt{ab} \to \varepsilon$, R_2 : $\mathtt{aaa} \to \mathtt{b}$ et $t = \mathtt{aabbbaabaaa}$

$\mathtt{aabbbaabaaa} \to \mathtt{aabbbaaaa}$

Extension 2: jeux de réécriture

Jeux de réécriture (Waldmann, 2002) :

- Système de réécriture (terminal)
- Partant d'un mot t, les joueurs appliquent alternativement des règles sur le mot.
- Celui qui ne peut plus appliquer de règle perd.

Exemple : R_1 : ab $\to \varepsilon$, R_2 : aaa $\to$ b et $t =$ aabbbaabaaa

aabbbaabaaa $\to$ aabbbaaaa $\to$ aabbbba

Extension 2: jeux de réécriture

Jeux de réécriture (Waldmann, 2002) :

- Système de réécriture (terminal)
- Partant d'un mot t, les joueurs appliquent alternativement des règles sur le mot.
- Celui qui ne peut plus appliquer de règle perd.

Exemple : R_1 : $\mathtt{ab} \to \varepsilon$, R_2 : $\mathtt{aaa} \to \mathtt{b}$ et $t = \mathtt{aabbbaabaaa}$

$\mathtt{aabbbaabaaa} \to \mathtt{aabbbaaaa} \to \mathtt{aabbbba} \to \mathtt{abbba}$

Extension 2: jeux de réécriture

Jeux de réécriture (Waldmann, 2002) :

- Système de réécriture (terminal)
- Partant d'un mot t, les joueurs appliquent alternativement des règles sur le mot.
- Celui qui ne peut plus appliquer de règle perd.

Exemple : R_1 : $\mathtt{ab} \to \varepsilon$, R_2 : $\mathtt{aaa} \to \mathtt{b}$ et $t = \mathtt{aabbbaabaaa}$

$\mathtt{aabbbaabaaa} \to \mathtt{aabbbaaaa} \to \mathtt{aabbbba} \to \mathtt{abbba} \to \mathtt{bba}$

Le premier joueur ne peut plus joueur et perd.

Extension 2: jeux de réécriture

Jeux de réécriture (Waldmann, 2002) :

- Système de réécriture (terminal)
- Partant d'un mot t, les joueurs appliquent alternativement des règles sur le mot.
- Celui qui ne peut plus appliquer de règle perd.

Exemple : $R_1 : \texttt{ab} \to \varepsilon$, $R_2 : \texttt{aaa} \to \texttt{b}$ et $t = \texttt{aabbbaabaaa}$

$\texttt{aabbbaabaaa} \to \texttt{aabbbaaaa} \to \texttt{aabbbba} \to \texttt{abbba} \to \texttt{bba}$

Le premier joueur ne peut plus joueur et perd.

Permet de modéliser beaucoup de jeux, dont les jeux octaux.
→ Jeu 0.07 modélisé avec les règles $\texttt{aa} \to \varepsilon$ et $\texttt{aa} \to \texttt{b}$. Les b marquent la séparation entre les tas.

$\longrightarrow$

aaaaaa

aabaa

Extension 2: jeux de réécriture

Jeux de réécriture (Waldmann, 2002) :

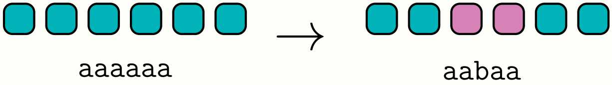
- Système de réécriture (terminal)
- Partant d'un mot t, les joueurs appliquent alternativement des règles sur le mot.
- Celui qui ne peut plus appliquer de règle perd.

Exemple : R_1 : ab $\to \varepsilon$, R_2 : aaa $\to$ b et $t =$ aabbbaabaaa

aabbbaabaaa $\to$ aabbbaaaa $\to$ aabbbba $\to$ abbba $\to$ bba

Le premier joueur ne peut plus joueur et perd.

Permet de modéliser beaucoup de jeux, dont les jeux octaux.
$\to$ Jeu 0.07 modélisé avec les règles aa $\to \varepsilon$ et aa $\to$ b. Les b marquent la séparation entre les tas.



Interprétation de la périodicité

A chaque mot t, valeur de Grundy associée $\mathcal{G}(t)$.
Classe de Grundy $\mathcal{L}_k$: mots ayant valeur k.

Théorème Waldmann,2002

La séquence de Grundy d'un jeu octal est ultimement périodique ssi, dans le jeu de réécriture associé, il y a un nombre fini de classes de Grundy non vide et chaque classe est rationnelle.

Interprétation de la périodicité

A chaque mot t, valeur de Grundy associée $\mathcal{G}(t)$.
Classe de Grundy $\mathcal{L}_k$: mots ayant valeur k.

Théorème Waldmann,2002

La séquence de Grundy d'un jeu octal est ultimement périodique ssi, dans le jeu de réécriture associé, il y a un nombre fini de classes de Grundy non vide et chaque classe est rationnelle.

$\Rightarrow$ Trouver un AFD qui détermine si un mot donné $\mathtt{ba}^{x_1}\mathtt{ba}^{x_2}\cdots\mathtt{ba}^{x_n}\mathtt{b}$ vérifie $\mathcal{G}(x_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}(x_n) = k$.

- Il existe un AFD qui calcule $\mathcal{G}(x_i)$ $\forall i$ (au plus $pp + p$ états).
- Avant chaque nouveau x_i, on garde en mémoire la somme précédente $\mathcal{G}(x_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}(x_{i-1})$: possible car le nombre de classes de Grundy est borné (par M).
- La nouvelle somme peut être calculée par un AFD avec au plus $2M$ états.

Interprétation de la périodicité

A chaque mot t, valeur de Grundy associée $\mathcal{G}(t)$.
Classe de Grundy $\mathcal{L}_k$: mots ayant valeur k.

Théorème Waldmann,2002

La séquence de Grundy d'un jeu octal est ultimement périodique ssi, dans le jeu de réécriture associé, il y a un nombre fini de classes de Grundy non vide et chaque classe est rationnelle.

$\Leftarrow$ Les $\mathcal{L}_k$ sont rationnels

- $\mathcal{L}_k \cap \mathtt{b}\mathtt{a}^*\mathtt{b}$ est rationnel.
- Langage rationnel à une lettre $\Leftrightarrow \bigcup\{\mathtt{b}\mathtt{a}^{kp+\ell}\mathtt{b} : k \in \mathbb{N}\}$
- Partition donc périodes multiples

Interprétation de la périodicité

A chaque mot t, valeur de Grundy associée $\mathcal{G}(t)$.
Classe de Grundy $\mathcal{L}_k$: mots ayant valeur k.

Théorème Waldmann,2002

La séquence de Grundy d'un jeu octal est ultimement périodique ssi, dans le jeu de réécriture associé, il y a un nombre fini de classes de Grundy non vide et chaque classe est rationnelle.

Conjecture Guy, 1956

Les classes de Grundy d'un jeu de réécriture octal sont en nombre fini et chacune forme un langage rationnel.

Interprétation de la périodicité

A chaque mot t, valeur de Grundy associée $\mathcal{G}(t)$.
Classe de Grundy $\mathcal{L}_k$: mots ayant valeur k.

Théorème Waldmann,2002

La séquence de Grundy d'un jeu octal est ultimement périodique ssi, dans le jeu de réécriture associé, il y a un nombre fini de classes de Grundy non vide et chaque classe est rationnelle.

Conjecture Guy, 1956

Les classes de Grundy d'un jeu de réécriture octal sont en nombre fini et chacune forme un langage rationnel.

Avec d'autres règles ? des classes rationelles ?

Sur d'autres types de règles ?

- Que se passe-t-il si on peut supprimer des `b` ?
  $\rightarrow$ Jeux taking-and-merging

Sur d'autres types de règles ?

- Que se passe-t-il si on peut supprimer des $\mathtt{b}$?
  $\rightarrow$ Jeux taking-and-merging

Définition

Un jeu de réécriture est dit "taking-and-merging" si toutes les règles sont de la forme $\mathtt{a}^k \rightarrow \varepsilon$ ou $\mathtt{b}^\ell \rightarrow \varepsilon$

Notation : $\{\mathtt{a}^{k_1}, \mathtt{a}^{k_2}, \dots, \mathtt{a}^{k_n}, \mathtt{b}^{\ell_1}, \mathtt{b}^{\ell_2}, \dots \mathtt{b}^{\ell_m}\}$

Sur d'autres types de règles ?

- Que se passe-t-il si on peut supprimer des $\texttt{b}$?
  $\rightarrow$ Jeux taking-and-merging

Définition

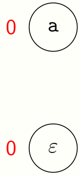
Un jeu de réécriture est dit "taking-and-merging" si toutes les règles sont de la forme $\texttt{a}^k \rightarrow \varepsilon$ ou $\texttt{b}^\ell \rightarrow \varepsilon$

Notation : $\{\texttt{a}^{k_1}, \texttt{a}^{k_2}, \ldots, \texttt{a}^{k_n}, \texttt{b}^{\ell_1}, \texttt{b}^{\ell_2}, \ldots \texttt{b}^{\ell_m}\}$

Question : Les classes de Grundy sont-elles rationelles ?

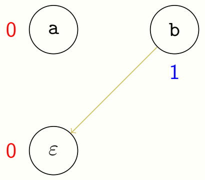
Un premier exemple : le jeu $\{\mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$

Règles : $\mathtt{aa} \to \varepsilon$ et $\mathtt{b} \to \varepsilon$



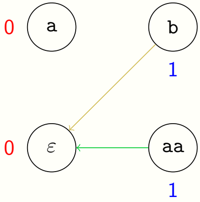
Un premier exemple : le jeu $\{\mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$

Règles : $\mathtt{aa} \to \varepsilon$ et $\mathtt{b} \to \varepsilon$



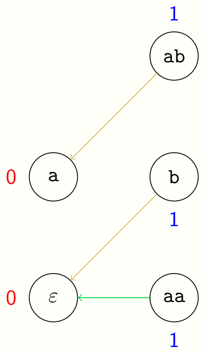
Un premier exemple : le jeu $\{\mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$

Règles : $\mathtt{aa} \to \varepsilon$ et $\mathtt{b} \to \varepsilon$



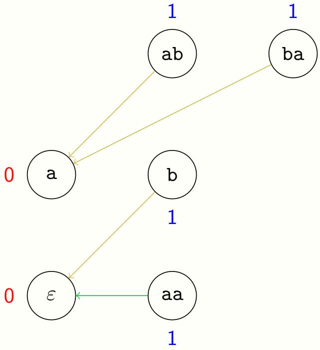
Un premier exemple : le jeu $\{\mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$

Règles : $\mathtt{aa} \to \varepsilon$ et $\mathtt{b} \to \varepsilon$



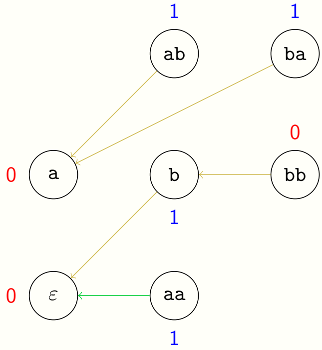
Un premier exemple : le jeu $\{\mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$

Règles : $\mathtt{aa} \to \varepsilon$ et $\mathtt{b} \to \varepsilon$



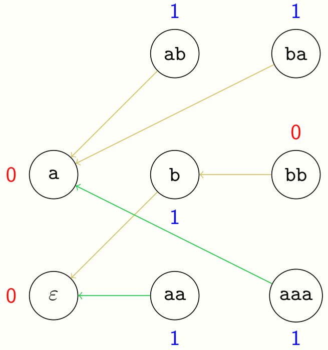
Un premier exemple : le jeu $\{\mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$

Règles : $\mathtt{aa} \to \varepsilon$ et $\mathtt{b} \to \varepsilon$



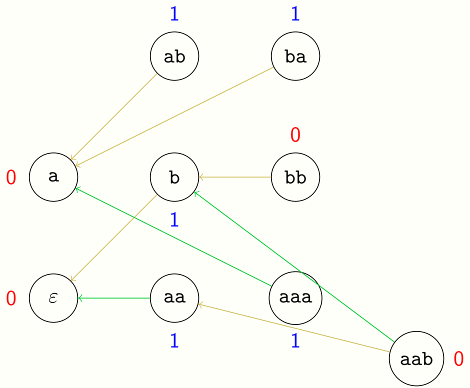
Un premier exemple : le jeu $\{\mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$

Règles : $\mathtt{aa} \to \varepsilon$ et $\mathtt{b} \to \varepsilon$



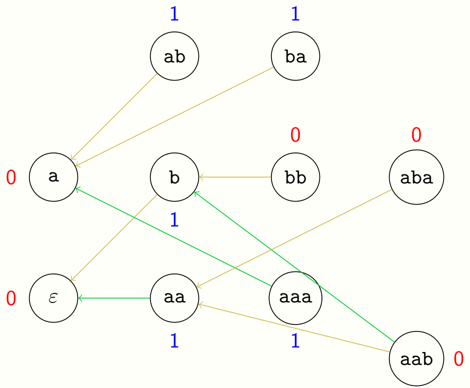
Un premier exemple : le jeu $\{\mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$

Règles : $\mathtt{aa} \to \varepsilon$ et $\mathtt{b} \to \varepsilon$



Un premier exemple : le jeu $\{\mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$

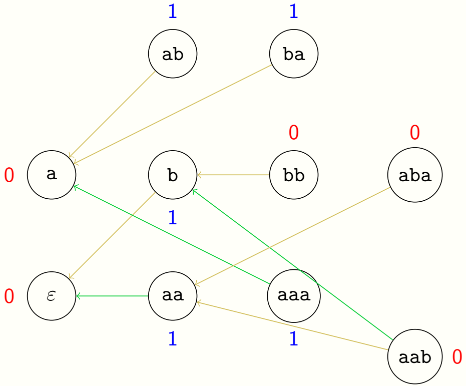
Règles : $\mathtt{aa} \to \varepsilon$ et $\mathtt{b} \to \varepsilon$



La quantité $|u|_a + 2|u|_b$ diminue de 2 à chaque coup.

Un premier exemple : le jeu $\{\mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$

Règles : $\mathtt{aa} \to \varepsilon$ et $\mathtt{b} \to \varepsilon$



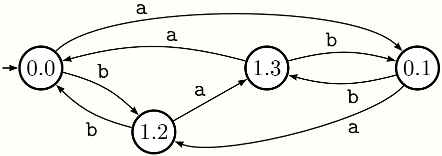
La quantité $|u|_a + 2|u|_b$ diminue de 2 à chaque coup.
$\to \mathcal{G}(u) = 0$ si et seulement si $|u|_a + 2|u|_b \bmod 4 \in \{0, 1\}$

Le jeu $\{a^2, b\}$ est rationnel

Théorème Duchêne, Marsault, P., Rigo, 2019+

Le jeu $\{a^2, b\}$ admet deux classes de Grundy $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$, chacune formant un langage rationnel.

Automate calculant $S(u) = (|u|_a + 2|u|_b) \bmod 4$:



- $\mathcal{G}(u) = 0 \Leftrightarrow S(u) \in \{0, 1\}$

Un exemple non régulier

Théorème DMPR,2019+

Soit G le jeu de réécriture $\{\mathtt{a}^k, \mathtt{b}^\ell\}$, avec $k, \ell > 1$.
Le langage $\mathcal{L}_0$ formé par les $\mathcal{P}$-positions de G n'est pas rationnel.

Preuve : Intersection des $\mathcal{P}$-positions de G avec le langage rationnel

$$L = \mathtt{b}^{\ell-1}(\mathtt{ab}^{\ell-1})^*(\mathtt{ba}^{k-1})^*.$$

Un exemple non régulier

Théorème DMPR,2019+

Soit G le jeu de réécriture $\{\mathtt{a}^k, \mathtt{b}^\ell\}$, avec $k, \ell > 1$.
Le langage $\mathcal{L}_0$ formé par les $\mathcal{P}$-positions de G n'est pas rationnel.

Preuve : Intersection des $\mathcal{P}$-positions de G avec le langage rationnel

$$L = \mathtt{b}^{\ell-1}(\mathtt{ab}^{\ell-1})^*(\mathtt{ba}^{k-1})^*.$$

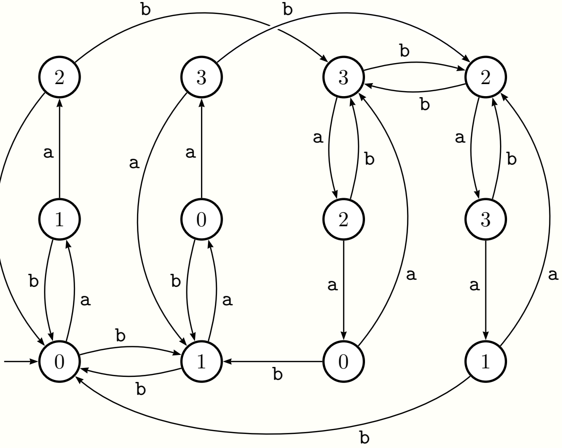
Mais il est reconnaissable avec un automate à pile !

Jeux avec $a \to \varepsilon$ et $b \to \varepsilon$

- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^{2k+1}, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ a 2 valeurs, $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ rationnels.

Jeux avec $a \to \varepsilon$ et $b \to \varepsilon$

- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^{2k+1}, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ a 2 valeurs, $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ rationnels.
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ prend 4 valeurs, calculées par un AFD à 12 états.



Jeux avec $a \to \varepsilon$ et $b \to \varepsilon$

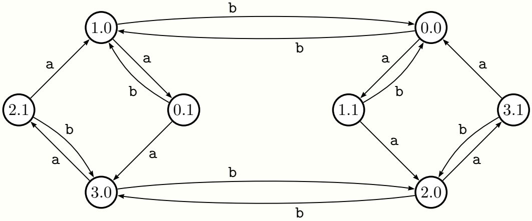
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^{2k+1}, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ a 2 valeurs, $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ rationnels.
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ prend 4 valeurs, calculées par un AFD à 12 états.
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^4, \mathtt{b}\}$:
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{a}^3, \mathtt{b}\}$:

Jeux avec $a \to \varepsilon$ et $b \to \varepsilon$

- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^{2k+1}, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ a 2 valeurs, $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ rationnels.
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ prend 4 valeurs, calculées par un AFD à 12 états.
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^4, \mathtt{b}\}$: ouvert (pas d'AFD trouvé, $\mathcal{G} \leq 3$?)
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{a}^3, \mathtt{b}\}$:

Jeux avec $a \to \varepsilon$ et $b \to \varepsilon$

- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^{2k+1}, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ a 2 valeurs, $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ rationnels.
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ prend 4 valeurs, calculées par un AFD à 12 états.
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^4, \mathtt{b}\}$: ouvert (pas d'AFD trouvé, $\mathcal{G} \leq 3$?)
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{a}^3, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ prend 4 valeurs, calculées par un AFD à 8 états.



Jeux avec $a \to \varepsilon$ et $b \to \varepsilon$

- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^{2k+1}, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ a 2 valeurs, $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ rationnels.
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ prend 4 valeurs, calculées par un AFD à 12 états.
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^4, \mathtt{b}\}$: ouvert (pas d'AFD trouvé, $\mathcal{G} \leq 3$?)
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{a}^3, \mathtt{b}\}$: $\mathcal{G}$ prend 4 valeurs, calculées par un AFD à 8 états.
- $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{a}^3, \mathtt{a}^4, \mathtt{b}\}$: ouvert

$$(\max \mathcal{G}(u))_{|u|=0,1,2,\ldots} =$$

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 13, 13, 13, 14$$

Question : Les valeurs pour ce jeu sont-elles bornées ?

Décider de la rationalité plus facilement

Besoin d'examiner tous les $\mathcal{L}_i$?

Théorème Waldmann, 2002

Pour tous les jeux taking-and-breaking :
$\mathcal{L}_0$ rationnel $\Rightarrow$ Grundy est bornée + tous les $\mathcal{L}_i$ rationnels.

Décider de la rationalité plus facilement

Besoin d'examiner tous les $\mathcal{L}_i$?

Théorème Waldmann, 2002

Pour tous les jeux taking-and-breaking :
$\mathcal{L}_0$ rationnel $\Rightarrow$ Grundy est bornée + tous les $\mathcal{L}_i$ rationnels.

Ne semble pas vrai pour les jeux taking-and-merging.

Théorème DMPR,2019

Le jeu $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{b}, \mathtt{b}^2\}$ a son langage $\mathcal{L}_0$ rationnel.

Décider de la rationalité plus facilement

Besoin d'examiner tous les $\mathcal{L}_i$?

Théorème Waldmann, 2002

Pour tous les jeux taking-and-breaking :
$\mathcal{L}_0$ rationnel $\Rightarrow$ Grundy est bornée + tous les $\mathcal{L}_i$ rationnels.

Ne semble pas vrai pour les jeux taking-and-merging.

Théorème DMPR,2019

Le jeu $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{b}, \mathtt{b}^2\}$ a son langage $\mathcal{L}_0$ rationnel.

Mais :

$$(\max \mathcal{G}(u))_{|u|=0,1,2,\ldots} =$$

$$0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8$$

Question :

- Pour le jeu $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^2, \mathtt{b}, \mathtt{b}^2\}$, $\mathcal{G}$ est-elle bornée ? existe-t-il i tel que $\mathcal{L}_i$ non rationnel ?

Conclusion

Systèmes de numération

Automates

Langages formels

Intelligence artificielle

Jeux Combinatoires

Logique

Graphes

Complexité

Cryptographie

Conclusion

Systèmes de numération

Automates

Langages formels

Intelligence artificielle

Jeux Combinatoires

Logique

Graphes

Complexité

Cryptographie

Merci !