Unions de boules pour la représentation de formes

Isabelle Sivignon

gipsa-lab, CNRS, Grenoble, France
isabelle.sivignon@gipsa-lab.grenoble-inp.fr
Collaborations avec T.-B. Nguyen, D. Attali, D. Coeurjolly, J. Hulin.

Journées Nationales du GDR IM

12 mars 2019

Plan de l'exposé

Motivations

Unions de boules

Convertir une forme en une union finie de boules

Approximation par boules à (O, I)-près

Plan de l'exposé

Motivations

Unions de boules

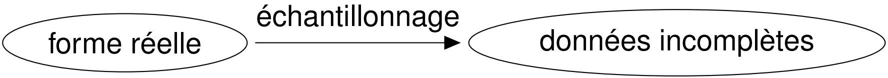
Convertir une forme en une union finie de boules

Approximation par boules à (O, I)-près

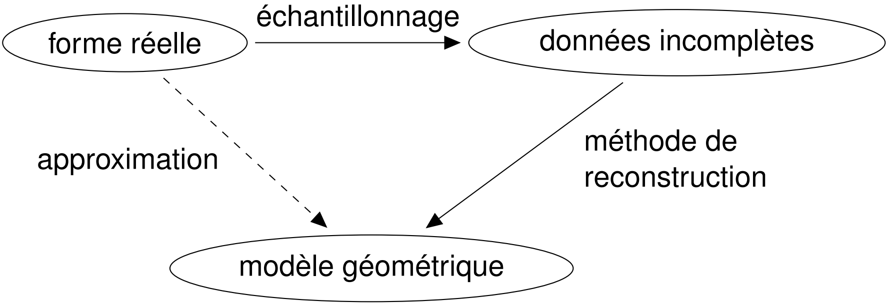
Représenter des formes

forme réelle

Représenter des formes

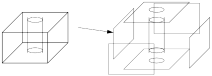


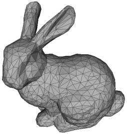
Représenter des formes



Schémas de représentation

Représentation surfacique

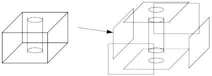
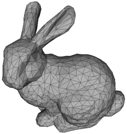




[Schüller et al. 18]

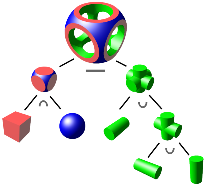
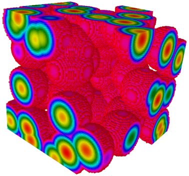
Schémas de représentation

Représentation surfacique


[Schüller et al. 18]

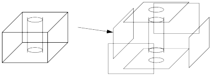
Représentation volumique

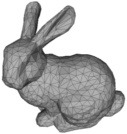



[DGtal]

Schémas de représentation

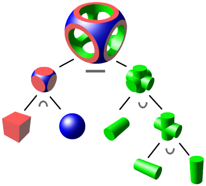
Représentation surfacique

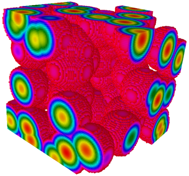




[Schüller et al. 18]

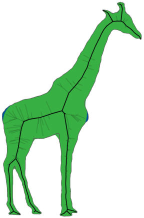
Représentation volumique





[DGtal]

Medial representation



[Giesen et al. 09]

Plan de l'exposé

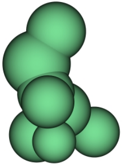
Motivations

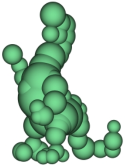
Unions de boules

Convertir une forme en une union finie de boules

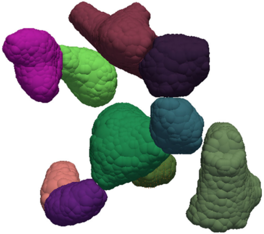
Approximation par boules à (O, I)-près

Union de boules


(a) Level 1


(b) Level 2


(c) Level 3



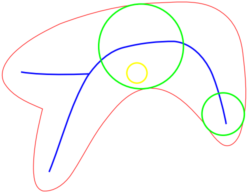
[Bradshaw & O'Sullivan, 2004]

[Mede et al., 18]

Atouts

- formes géométriques simples
- invariance par rotation
- simplicité et généricité théoriques de la conversion

Axe médian : définitions



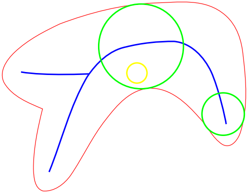
Définition séminale [Blum 67]

Points de rencontre d'un “feu de prairie” initié sur le bord de la forme

Définitions modernes

- ensemble des centres de boules maximales
- ensemble des points ayant au moins deux points les plus proches sur le bord

Axe médian : définitions



Définition séminale [Blum 67]

Points de rencontre d'un "feu de prairie" initié sur le bord de la forme

Définitions modernes

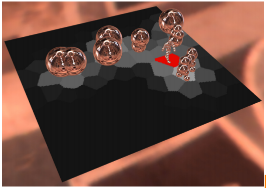
- ensemble des centres de boules maximales
- ensemble des points ayant au moins deux points les plus proches sur le bord

$\Rightarrow$ Union généralement infinie de boules pouvant être définie pour toute forme de $\mathbb{R}^n$

Applications

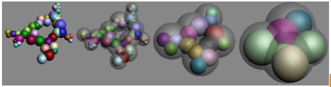
Infographie

Utilisation de *structures accélératrices* : collisions, génération d'ombres, rendu de surface, appariement de formes, etc

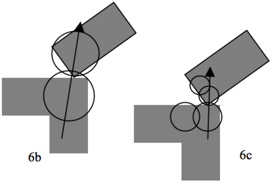


[Ren et al. 06]

[Guérin et al. 16]



[Shamir et al. 03]

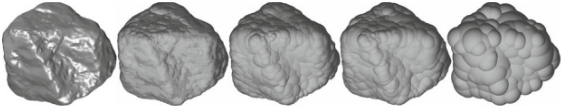


[O'Sullivan et al. 99, Ram Choi et al. 17, etc]

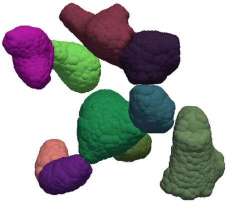
Applications

Simulation de phénomènes physiques

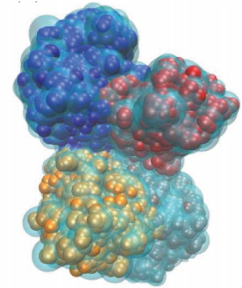
Particules, neige, molécules, etc.



[Ferellec et al. 10]



[Mede et al. 18]



[Cazals et al. 14]

Plan de l'exposé

Motivations

Unions de boules

Convertir une forme en une union finie de boules

- Nuage de points $\Rightarrow$ union de boules
- Forme digitale $\Rightarrow$ union de boules
- Forme solide maillée $\Rightarrow$ union de boules
- Union de boules $\Rightarrow$ union de boules

Approximation par boules à (O, I)-près

Axe médian : définitions

Définitions modernes

- ensemble des centres de boules maximales
  = boules $b \in F$ t.q. $\forall b' \subseteq F$ avec $b \subseteq b'$, $b' = b$
- ensemble des points ayant au moins deux points les plus proches sur le bord

Axe médian : définitions

Définitions modernes

- ensemble des centres de boules maximales
  = boules $b \in F$ t.q. $\forall b' \subseteq F$ avec $b \subseteq b'$, $b' = b$
- ensemble des points ayant au moins deux points les plus proches sur le bord

$\Rightarrow$ On cherche les points “les plus loin à l’intérieur de la forme”

Plan de l'exposé

Motivations

Unions de boules

Convertir une forme en une union finie de boules

- Nuage de points $\Rightarrow$ union de boules
- Forme digitale $\Rightarrow$ union de boules
- Forme solide maillée $\Rightarrow$ union de boules
- Union de boules $\Rightarrow$ union de boules

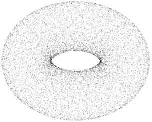
Approximation par boules à (O, I)-près

- Définition
- Etude dans le cas union de boules $\Rightarrow$ union de boules
  - Complexité
  - Algorithme optimal

Problématique

Nuage de points

ensemble de points P qui échantillonnent la surface d'une forme F

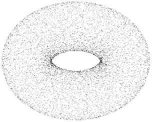


`Donnée` : nuage de points P
`Résultat` : ensemble de boules $\mathcal{B}$

Problématique

Nuage de points

ensemble de points P
qui échantillonnent la
surface d'une forme F



`Donnée` : nuage de points P
`Résultat` : ensemble de boules $\mathcal{B}$

Contrainte

Quand la densité de l'échantillon P tend vers l'infini, le résultat tend vers l'AM de la forme échantillonnée F.

Outil

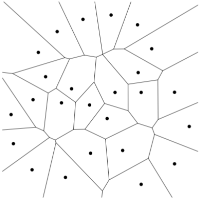
Diagramme de Voronoi

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble de sites, $s \in S$.
$Vor(s) = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall s' \in S \; d(x, s) \leq d(x, s')\}$

Outil

Diagramme de Voronoi

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble de sites, $s \in S$.
$Vor(s) = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall s' \in S\ d(x,s) \leq d(x,s')\}$



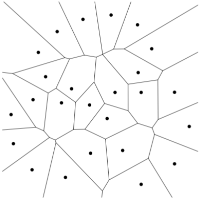
[Attali et al. 96]

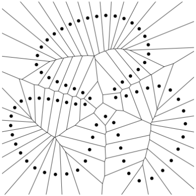
Outil

Diagramme de Voronoi

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble de sites, $s \in S$.

$Vor(s) = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall s' \in S\ d(x,s) \leq d(x,s')\}$ $\Rightarrow$ partition de $\mathbb{R}^n$





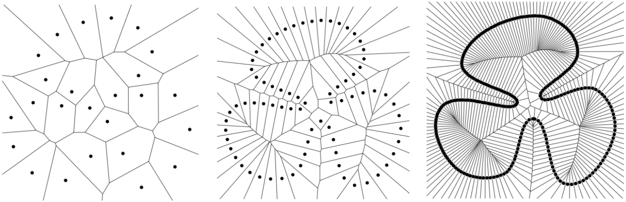
[Attali et al. 96]

Outil

Diagramme de Voronoi

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble de sites, $s \in S$.

$Vor(s) = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall s' \in S \; d(x,s) \leq d(x,s')\}$ $\Rightarrow$ partition de $\mathbb{R}^n$



[Attali et al. 96]

Pôles et boules polaires

Pôles

Points les plus loin de leur site
$\Rightarrow$ pôles internes = points *les plus loin à l'intérieur*

Pôles et boules polaires

Pôles

Points les plus loin de leur site
$\Rightarrow$ pôles internes = points *les plus loin à l'intérieur*

Boule polaire

Site s, pôle $p(s)$: boule polaire = $b(p(s), d(p(s), s))$.

Pôles et boules polaires

Pôles

Points les plus loin de leur site
$\Rightarrow$ pôles internes = points *les plus loin à l'intérieur*

Boule polaire

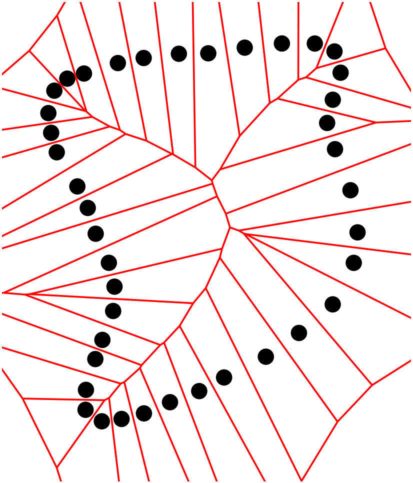
Site s, pôle $p(s)$: boule polaire = $b(p(s), d(p(s), s))$.

Pourquoi ça marche ? [Amenta, Kolluri 2001 + travaux Voronoi/AM entre 96 et 00]

Conditions d'échantillonnage : plus d'échantillons dans les parties proches de l'axe médian

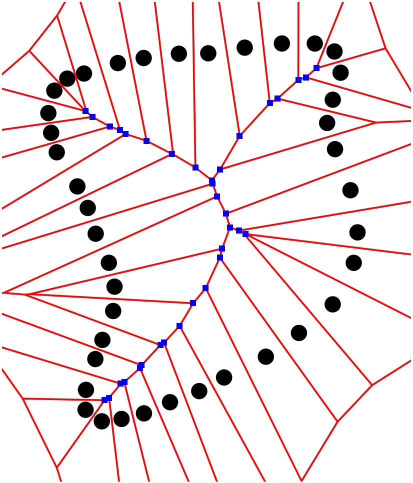
- cellules de Voronoi sont allongées, étroites et perp. à la surface de la forme
- boules polaires internes sont presque entièrement contenues dans la forme

Exemple en 2D



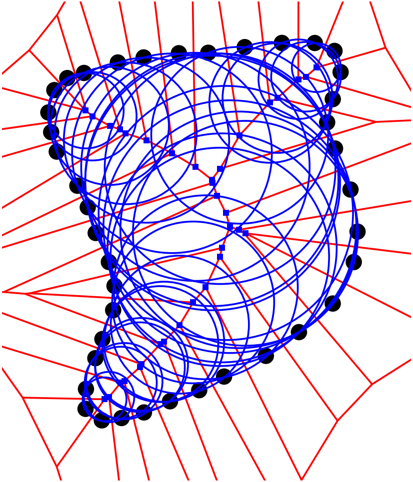
Complexité : $\mathcal{O}(n \log(n))$ pour n points

Exemple en 2D



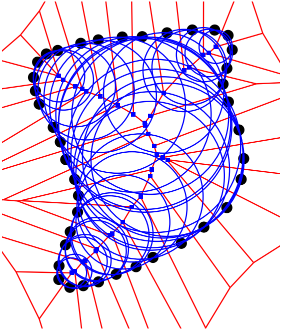
Complexité : $\mathcal{O}(n \log(n))$ pour n points

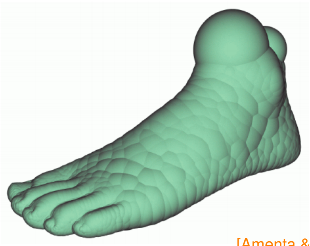
Exemple en 2D



Complexité : $\mathcal{O}(n \log(n))$ pour n points

Exemple en 2D.. et en 3D





[Amenta & Kolluri 2001]

Plan de l'exposé

Motivations

Unions de boules

Convertir une forme en une union finie de boules

- Nuage de points $\Rightarrow$ union de boules
- Forme digitale $\Rightarrow$ union de boules
- Forme solide maillée $\Rightarrow$ union de boules
- Union de boules $\Rightarrow$ union de boules

Approximation par boules à (O, I)-près

- Définition
- Etude dans le cas union de boules $\Rightarrow$ union de boules
  - Complexité
  - Algorithme optimal

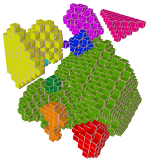
Forme digitale

Ensemble digital

Ensemble de points de $\mathbb{Z}^n$

Forme digitale

Ensemble de points de $\mathbb{Z}^n$ + topologie (notion de voisinage)



Problème et outil

`Donnée` : forme digitale $S \subset \mathbb{Z}^n$
`Résultat` : ensemble de boules $\mathcal{B}$ tel que $\bigcup \mathcal{B} \cap \mathbb{Z}^n = S$

Utiliser l'approche Voronoi ?

- conditions d'échantillonnage ?
- boules de centres $\notin \mathbb{Z}^n$... problèmes de précision

Problème et outil

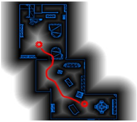
`Donnée` : forme digitale $S \subset \mathbb{Z}^n$
`Résultat` : ensemble de boules $\mathcal{B}$ tel que $\bigcup \mathcal{B} \cap \mathbb{Z}^n = S$

Utiliser l'approche Voronoi ?

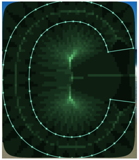
- conditions d'échantillonnage ?
- boules de centres $\notin \mathbb{Z}^n$... problèmes de précision

Transformée en distance

Forme digitale S, $\forall p \in S$
$DT(p) = \min_{q \notin S}\{d(p,q)\}$



[gamma.web.unc.edu/]



[Glyphy]

Transformée en distance/Axe médian

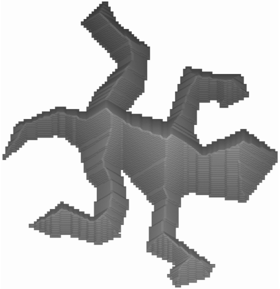
Lien

Forme digitale S, $\forall p \in S$, $DT(p)$ = rayon de la plus grande boule (ouverte) centrée en p incluse dans S :
$b(p, DT(p)) \cap \mathbb{Z}^n \subseteq S$

Transformée en distance/Axe médian

Lien

Forme digitale S, $\forall p \in S$, $DT(p)$ = rayon de la plus grande boule (ouverte) centrée en p incluse dans S :
$b(p, DT(p)) \cap \mathbb{Z}^n \subseteq S$
$\Rightarrow$ axe médian de S = maxima locaux de DT



[K. Palágyi, http ://www.inf.u-szeged.hu/ palagyi/skel/skel.html]

Algorithme : calcul DT

Quelle distance d ?

Distance euclidienne au carré : $p, q \in \mathbb{Z}^n$,
$d_2^2(p,q) = \sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2$ $\Rightarrow$ exacte, nombres entiers

Autres options : distances basées chemin, vecteur $\vec{pq}$

Algorithme : calcul DT

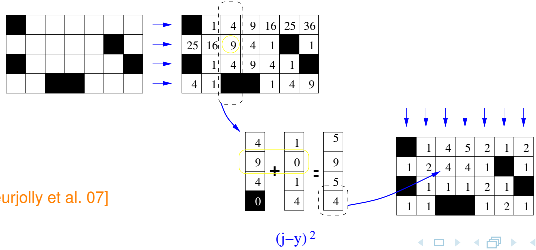
Quelle distance d ?

Distance euclidienne au carré : $p, q \in \mathbb{Z}^n$,
$d_2^2(p,q) = \sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2 \Rightarrow$ exacte, nombres entiers

Autres options : distances basées chemin, vecteur $\vec{pq}$

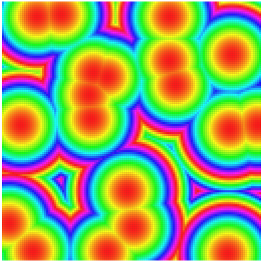
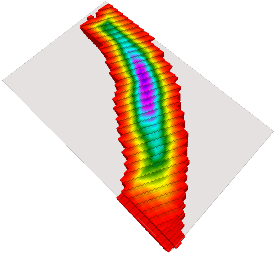
Algorithme séparable - principe dans $\mathbb{Z}^2$

$$p = (i,j) \in S \subset \mathbb{Z}^2,\ DT(i,j) = \min_{q(x,y)\notin S}\{(i-x)^2 + (j-y)^2\}$$



[Saito et al. 94, Coeurjolly et al. 07]

Images...


[Coeurjolly et al. 07] [DGtal Library]

Complexité : $O(N^d)$ pour un domaine N^d.

[Extension distances basées chemins Coeurjolly & Sivignon 19]

Algorithme : extraction de l'axe médian

Objectif

Résultat de la DT : une boule par point p de S
$\Rightarrow$ Ne garder que les boules maximales = non incluses dans une autre boule

Algorithme : extraction de l'axe médian

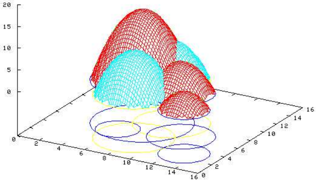
Objectif

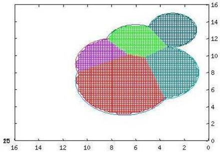
Résultat de la DT : une boule par point p de S
$\Rightarrow$ Ne garder que les boules maximales = non incluses dans une autre boule

$$
\begin{aligned}
S = \quad & \Big(\bigcup_{p \in S} b(p, DT(p))\Big) \cap \mathbb{Z}^2 \\
= \quad & \{(i,j) \mid \exists p,\ (i - x_p)^2 + (j - y_p)^2 < DT(p)\} \cap \mathbb{Z}^2 \\
= \quad & \{(i,j) \mid \exists p,\ \underbrace{DT(p) - (i - x_p)^2 - (j - y_p)^2 > 0}_{\text{paraboloïde}}\} \cap \mathbb{Z}^2
\end{aligned}
$$

Algorithme : extraction de l'axe médian

$$S = \{(i,j) \mid \exists p,\ \underbrace{DT(p) - (i-x_p)^2 - (j-y_p)^2 > 0}_{\text{paraboloïde}}\} \cap \mathbb{Z}^2$$



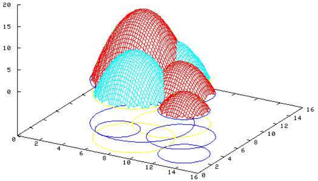


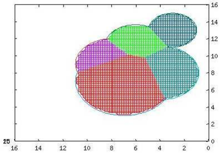
[Coeurjolly et al. 07]

⇒ *Les paraboloïdes les plus hauts* suffisent à définir S : les autres correspondent à des boules non maximales

Algorithme : extraction de l'axe médian

$$S = \{(i,j) \mid \exists p,\ \underbrace{DT(p) - (i - x_p)^2 - (j - y_p)^2 > 0}_{\text{paraboloïde}}\} \cap \mathbb{Z}^2$$



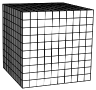
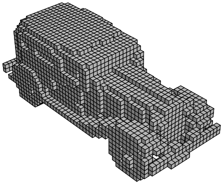
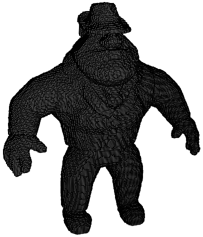
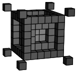
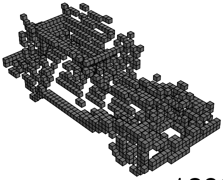
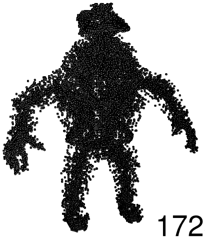


[Coeurjolly et al. 07]

$\Rightarrow$ *Les paraboloïdes les plus hauts* suffisent à définir S : les autres correspondent à des boules non maximales

$\Rightarrow$ outil algorithmique = *diagramme de puissance*

Quelques résultats

Objet			
$AM(\mathcal{S})$	 104	 1292	 17238

[Coeurjolly et al. 07]

Plan de l'exposé

Motivations

Unions de boules

Convertir une forme en une union finie de boules

- Nuage de points $\Rightarrow$ union de boules
- Forme digitale $\Rightarrow$ union de boules
- Forme solide maillée $\Rightarrow$ union de boules
- Union de boules $\Rightarrow$ union de boules

Approximation par boules à (O, I)-près

- Définition
- Etude dans le cas union de boules $\Rightarrow$ union de boules
  - Complexité
  - Algorithme optimal

Problématique

`Donnée` : forme solide maillée F

`Résultat` : ensemble de boules $\mathcal{B}$.

Problématique

`Donnée` : forme solide maillée F

`Résultat` : ensemble de boules $\mathcal{B}$.

AM = ensemble de boules infini

- échantillonner la forme $\Rightarrow$ voir conversion nuage de points
- calculer un échantillon de l'AM

Problématique

`Donnée` : forme solide maillée F
`Résultat` : ensemble de boules $\mathcal{B}$.

AM = ensemble de boules infini

- échantillonner la forme $\Rightarrow$ voir conversion nuage de points
- calculer un échantillon de l'AM

Quelles contraintes ?

- Géométrique $\begin{cases} \text{union de boules englobante} : F \subseteq \bigcup \mathcal{B} \\ \text{union de boules incluse} : \bigcup \mathcal{B} \subseteq F \end{cases}$
- Topologique : même type d'homotopie pour $\bigcup \mathcal{B}$ et F ?

Problématique

`Donnée` : forme solide maillée F
`Résultat` : ensemble de boules $\mathcal{B}$.

AM = ensemble de boules infini

- échantillonner la forme $\Rightarrow$ voir conversion nuage de points
- calculer un échantillon de l'AM

Quelles contraintes ?

- Géométrique $\begin{cases} \text{union de boules englobante} : F \subseteq \bigcup \mathcal{B} \\ \text{union de boules incluse} : \bigcup \mathcal{B} \subseteq F \end{cases}$
- Topologique : même type d'homotopie pour $\bigcup \mathcal{B}$ et F ?

Quelle optimisation ?

Budget de n boules, $|\mathcal{B}| = n$
Minimiser la différence de volume entre $\bigcup \mathcal{B}$ et F

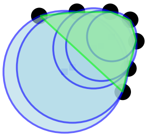
Union de boules englobante

Approches “Voronoi” [Hubbard 96, Bradshaw et al. 02]

- échantillonner la surface de F
- calculer l’ensemble des boules médiales
  $\Rightarrow$ voir conversion d’un nuage de points
- F est “couverte” si tous les points sont couverts

Union de boules englobante

Approches “Voronoi” [Hubbard 96, Bradshaw et al. 02]

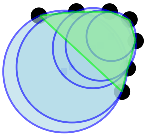


- échantillonner la surface de F
- calculer l'ensemble des boules médiales
  $\Rightarrow$ voir conversion d'un nuage de points
- F est “couverte” si tous les points sont couverts

Union de boules englobante

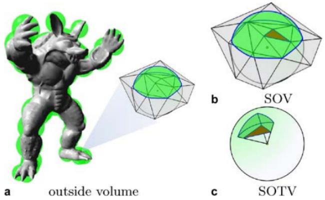
Approches "Voronoi" [Hubbard 96, Bradshaw et al. 02]

- échantillonner la surface de F
- calculer l'ensemble des boules médiales
  $\Rightarrow$ voir conversion d'un nuage de points
- F est "couverte" si tous les points sont couverts



Approche "variationnelle" [Wang et al. 06]

- clustering itératif de type Lloyd
- remplacer chaque cluster par une boule englobante de volume minimum

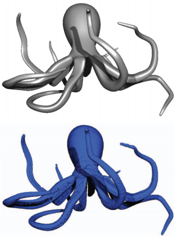


Union de boules incluse

Approximation de l'axe médian [Stolpner et al. 2011, 2012]

- estimer un échantillon de "points médiaux" : l'axe médian coupe $[pq]$ ssi $\text{proj}_{\partial F}(p) \neq \text{proj}_{\partial F}(q)$.
- les boules sont internes à F et tangentes à ∂F

39632
triangles



9801
spheres
rel. speed 100%
vol. error $[0.0211, 0.0211]$

Plan de l'exposé

Motivations

Unions de boules

Convertir une forme en une union finie de boules

- Nuage de points $\Rightarrow$ union de boules
- Forme digitale $\Rightarrow$ union de boules
- Forme solide maillée $\Rightarrow$ union de boules
- Union de boules $\Rightarrow$ union de boules

Approximation par boules à (O, I)-près

- Définition
- Etude dans le cas union de boules $\Rightarrow$ union de boules
  - Complexité
  - Algorithme optimal

Problème

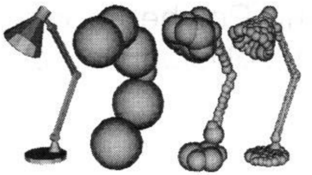
`Donnée` : ensemble de boules $\hat{\mathcal{B}}$
`Résultat` : ensemble de boules $\mathcal{B}$, $|\mathcal{B}| < |\hat{\mathcal{B}}|$
$\mathcal{B}$ est une *simplification* de $\hat{\mathcal{B}}$

Problème

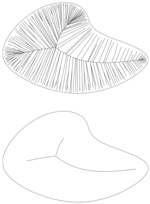
`Donnée` : ensemble de boules $\hat{\mathcal{B}}$
`Résultat` : ensemble de boules $\mathcal{B}$, $|\mathcal{B}| < |\hat{\mathcal{B}}|$
$\mathcal{B}$ est une *simplification* de $\hat{\mathcal{B}}$

Pourquoi ?

1. pour les tâches gourmandes en calcul : représentations compactes et “fidèles”
2. pour définir des hiérarchies de volumes englobants
3. instabilité de l’AM au bruit



[Hubbard 96]



[Attali & Montanvert 96]

Quelles contraintes ? Quelle fidélité ?

Sans perte

- cas général : une boule b peut être supprimée $\Leftrightarrow$ il existe une sous-famille de boules $\mathcal{B}' \subset \hat{\mathcal{B}}$ t.q. $b \subseteq \bigcup B'$
  $\Rightarrow$ *diagramme de puissance*

Quelles contraintes ? Quelle fidélité ?

Sans perte

- cas général : une boule b peut être supprimée $\Leftrightarrow$ il existe une sous-famille de boules $\mathcal{B}' \subset \hat{\mathcal{B}}$ t.q. $b \subseteq \bigcup B'$
  $\Rightarrow$ *diagramme de puissance*
- cas digital : on ne veut pas perdre d'info de $\bigcup \hat{\mathcal{B}} \cap \mathbb{Z}^2$, mais on peut en perdre de $\bigcup \hat{\mathcal{B}}$
  $\Rightarrow$ peut-on/comment simplifier ?

Quelles contraintes ? Quelle fidélité ?

Sans perte

- cas général : une boule b peut être supprimée $\Leftrightarrow$ il existe une sous-famille de boules $\mathcal{B}' \subset \hat{\mathcal{B}}$ t.q. $b \subseteq \bigcup B'$
  $\Rightarrow$ *diagramme de puissance*
- cas digital : on ne veut pas perdre d'info de $\bigcup \hat{\mathcal{B}} \cap \mathbb{Z}^2$, mais on peut en perdre de $\bigcup \hat{\mathcal{B}}$
  $\Rightarrow$ peut-on/comment simplifier ?

Avec pertes

- union de boules “incluse” : $\bigcup \mathcal{B} \subset \bigcup \hat{\mathcal{B}}$
- union de boules “englobante” : $\bigcup \hat{\mathcal{B}} \subset \bigcup \mathcal{B}$
- ni englobant, ni inclus... mais contrainte géométrique

Quelles contraintes ? Quelle fidélité ?

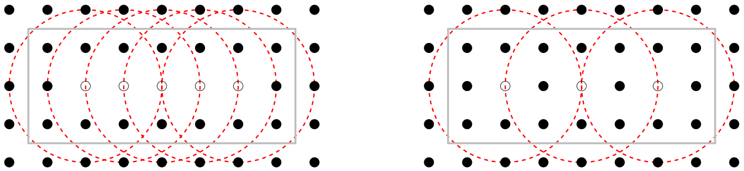
Sans perte

- cas général : une boule b peut être supprimée $\Leftrightarrow$ il existe une sous-famille de boules $\mathcal{B}' \subset \hat{\mathcal{B}}$ t.q. $b \subseteq \bigcup B'$
  $\Rightarrow$ *diagramme de puissance*
- cas digital : on ne veut pas perdre d'info de $\bigcup \hat{\mathcal{B}} \cap \mathbb{Z}^2$, mais on peut en perdre de $\bigcup \hat{\mathcal{B}}$
  $\Rightarrow$ peut-on/comment simplifier ?

Avec pertes

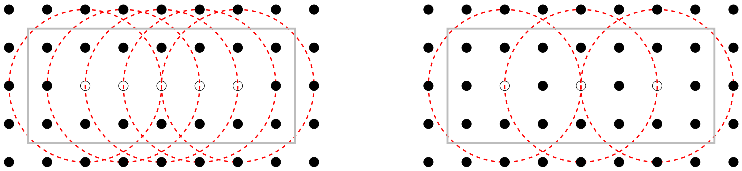
- union de boules "incluse" : $\bigcup \mathcal{B} \subset \bigcup \hat{\mathcal{B}}$
- union de boules "englobante" : $\bigcup \hat{\mathcal{B}} \subset \bigcup \mathcal{B}$
- ni englobant, ni inclus... mais contrainte géométrique

Cas digital : simplification sans perte



[Coeurjolly, Hulin, Sivignon 08]

Cas digital : simplification sans perte

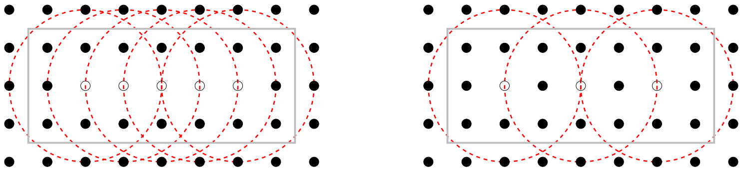


[Coeurjolly, Hulin, Sivignon 08]

Problème d'optimisation

Soient S une forme digitale, et $\hat{\mathcal{B}}$ les boules de son AM.
Trouver $\mathcal{B} \subseteq \hat{\mathcal{B}}$ t.q. $\bigcup \mathcal{B} \cap \mathbb{Z}^2 = \bigcup \hat{\mathcal{B}} \cap \mathbb{Z}^2$ et $|\mathcal{B}|$ minimum.

Cas digital : simplification sans perte



[Coeurjolly, Hulin, Sivignon 08]

Problème d'optimisation

Soient S une forme digitale, et $\hat{\mathcal{B}}$ les boules de son AM.
Trouver $\mathcal{B} \subseteq \hat{\mathcal{B}}$ t.q. $\bigcup \mathcal{B} \cap \mathbb{Z}^2 = \bigcup \hat{\mathcal{B}} \cap \mathbb{Z}^2$ et $|\mathcal{B}|$ minimum.

Problème de décision

Existe-t-il un tel sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\hat{\mathcal{B}}$ avec $|\mathcal{B}| \leq k$?

Un problème NP-complet...

Problème de type MINSETCOVER géométrique

dans NP

Vérifier en temps polynomial qu'une union de boules couvre S

$\checkmark$

Un problème NP-complet...

Problème de type MinSetCover géométrique

dans NP

Vérifier en temps polynomial qu'une union de boules couvre S
$\checkmark$

Au moins aussi dur que...

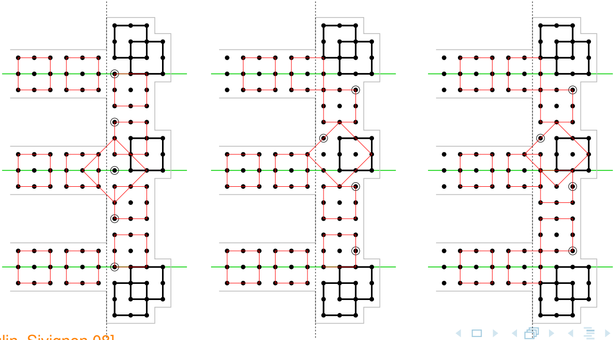
Réduction à partir de *planar-4 3-SAT*
$\Rightarrow$ définir des gadgets géométriques pour les variables et les clauses

Un problème NP-complet...

Problème de type MINSETCOVER géométrique

Au moins aussi dur que...

Réduction à partir de *planar-4 3-SAT*
$\Rightarrow$ définir des gadgets géométriques pour les variables et les clauses



[Coeurjolly, Hulin, Sivignon 08]

Algorithme d'approximation garanti

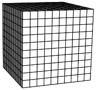
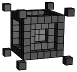
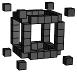
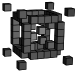
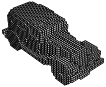
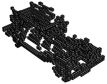
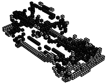
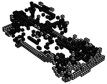
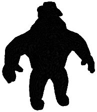
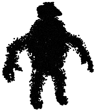
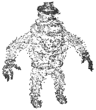
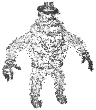
Algorithme glouton garanti [Chvatal 79]

- $|\mathcal{B}| \leq H_{|\mathcal{S}|} \cdot |\mathcal{B}^*|$, $H_{|\mathcal{S}|} \leq ln(|S|) + 1$

Entrée S et l'ensemble de boules $\hat{\mathcal{B}}$
Sortie la solution approximée $\mathcal{B}$
U = S `// ensemble des points non couverts`

$\mathcal{B} = \emptyset$
tant que $U \neq \emptyset$ **faire**
  Selectionner $b \in \hat{\mathcal{B}}$ qui maximize $|b \cap U|$
  $U = U - b$
  $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \{b\}$
fin
Retourner $\mathcal{B}$

Résultats

Objet	$\hat{\mathcal{B}} = AM(\mathcal{S})$	$\mathcal{B}$[Ragnelmalm et al. 93]	$\mathcal{B}$ garanti [Coeurjolly et al. 08]
	 104	 56 (-46%) [$\lt 0.01$s]	 66 (-36%) [$\lt 0.01$s]
	 1292	 795 (-38%) [0.1s]	 820 (-36%) [0.19s]
	 17238	 6177 (-64%) [48.53s]	 6553 (-62%) [57.79s]

Quelles contraintes ? Quelle fidélité ?

Sans perte

- cas général : une boule b peut être supprimée $\Leftrightarrow$ il existe une famille de boules $\mathcal{B}' \subseteq \hat{\mathcal{B}}$ t.q. $b \subseteq \bigcup B'$
  $\Rightarrow$ *diagramme de puissance*
- ce qui nous intéresse n'est pas vraiment $\bigcup \hat{\mathcal{B}}$ mais $\bigcup \hat{\mathcal{B}} \cap \mathbb{Z}^2$
  $\Rightarrow$ peut-on/comment simplifier ?

Avec pertes

- union de boules “incluse” : $\bigcup \mathcal{B} \subset \bigcup \hat{\mathcal{B}}$
- union de boules “englobante” : $\bigcup \hat{\mathcal{B}} \subset \bigcup \mathcal{B}$
- ni englobant, ni inclus... mais contrainte géométrique

Quelques approches

Union de boules "incluse"

- Supp. les boules les + petites / critère [Attali 96, Chazal & Lieutier 05, ...]
- Supp. les boules + petites que les boules autour [Giesen et al. 09]
- Calculer un nouvel ensemble de boules de card. fixé : minimiser le volume perdu $\Rightarrow$ algorithme glouton [Cazals et al. 14]

Quelques approches

Union de boules “incluse”

- Supp. les boules les + petites / critère [Attali 96, Chazal & Lieutier 05, ...]
- Supp. les boules + petites que les boules autour [Giesen et al. 09]
- Calculer un nouvel ensemble de boules de card. fixé : minimiser le volume perdu $\Rightarrow$ algorithme glouton [Cazals et al. 14]

Union de boules “englobante”

- union incluse puis faire grossir les boules [Cazals et al. 14]
- construction hiérarchique [Shamir et al. 03]

Quelques approches

Union de boules “incluse”

- Supp. les boules les + petites / critère [Attali 96, Chazal & Lieutier 05, ...]
- Supp. les boules + petites que les boules autour [Giesen et al. 09]
- Calculer un nouvel ensemble de boules de card. fixé : minimiser le volume perdu $\Rightarrow$ algorithme glouton [Cazals et al. 14]

Union de boules “englobante”

- union incluse puis faire grossir les boules [Cazals et al. 14]
- construction hiérarchique [Shamir et al. 03]

Ni l’un, ni l’autre...

- fusion de boules selon une contrainte géométrique de type “on doit toujours couvrir...” [Hubbard 96, Bradshaw & Sullivan 02, ...]

Plan de l'exposé

Motivations

Unions de boules

Convertir une forme en une union finie de boules

Approximation par boules à (O, I)-près

- Définition
- Etude dans le cas union de boules $\Rightarrow$ union de boules
  - Complexité
  - Algorithme optimal

Plan de l'exposé

Motivations

Unions de boules

Convertir une forme en une union finie de boules

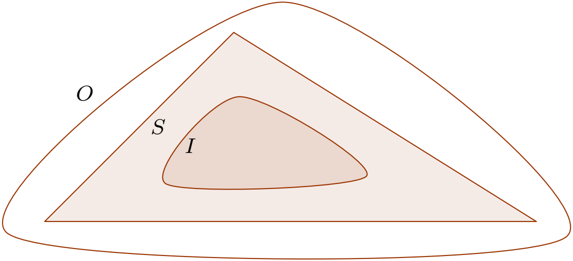
- Nuage de points $\Rightarrow$ union de boules
- Forme digitale $\Rightarrow$ union de boules
- Forme solide maillée $\Rightarrow$ union de boules
- Union de boules $\Rightarrow$ union de boules

Approximation par boules à (O, I)-près

- Définition
- Etude dans le cas union de boules $\Rightarrow$ union de boules
  - Complexité
  - Algorithme optimal

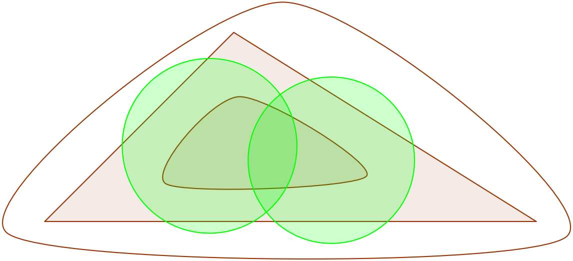
Approximation à (O, I)-près

Soient $I \subseteq S \subseteq O \subseteq \mathbb{R}^d$ trois sous-ensembles non vides. Un ensemble de boules $\mathcal{B}$ est une **approximation à (O, I)-près de $\boldsymbol{S}$** si $I \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subseteq O$.



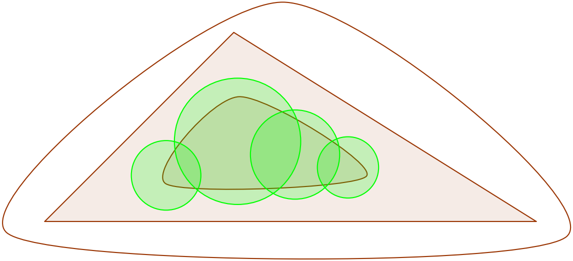
Approximation à (O, I)-près

Soient $I \subseteq S \subseteq O \subseteq \mathbb{R}^d$ trois sous-ensembles non vides. Un ensemble de boules $\mathcal{B}$ est une **approximation à (O, I)-près de S** si $I \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subseteq O$.



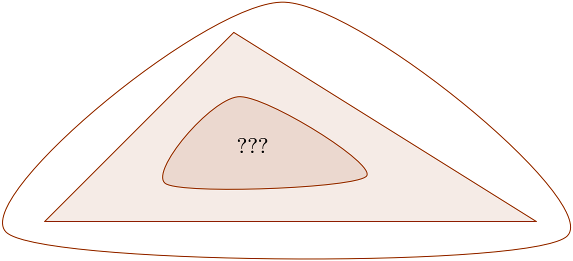
Approximation à (O, I)-près

Soient $I \subseteq S \subseteq O \subseteq \mathbb{R}^d$ trois sous-ensembles non vides. Un ensemble de boules $\mathcal{B}$ est une **approximation à (O, I)-près de S** si $I \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subseteq O$.



Approximation à (O, I)-près

Soient $I \subseteq S \subseteq O \subseteq \mathbb{R}^d$ trois sous-ensembles non vides. Un ensemble de boules $\mathcal{B}$ est une **approximation à (O, I)-près de S** si $I \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subseteq O$.



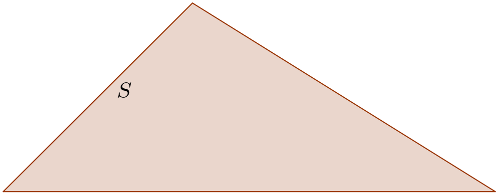
$\mathcal{B}_{opt}$ est une approximation **optimale** si $|\mathcal{B}_{opt}| = \min_{I \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subseteq O} |\mathcal{B}|$.

Choix de O et I

- permet de modéliser bon nombre des problèmes mentionnés précédemment
- selon ce que l'on choisit : contrôle distance de Hausdorff, volume, contraintes géométriques, etc

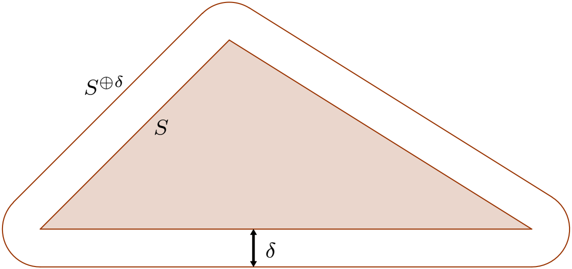
Dilatation et érosion

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^d$, $\delta, \epsilon > 0$. Le **δ-dilaté** et l'**ϵ-érodé** de S sont respectivement [Serra 83]
$S^{\oplus\delta} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, S) \leq \delta\}$ et $S^{\ominus\epsilon} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, S^{\mathsf{c}}) \geq \epsilon\}$.



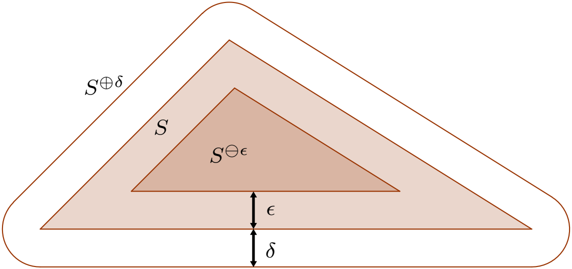
Dilatation et érosion

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^d$, $\delta, \epsilon > 0$. Le **δ-dilaté** et l'**ϵ-érodé** de S sont respectivement [Serra 83]
$S^{\oplus\delta} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, S) \leq \delta\}$ et $S^{\ominus\epsilon} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, S^\mathsf{c}) \geq \epsilon\}$.



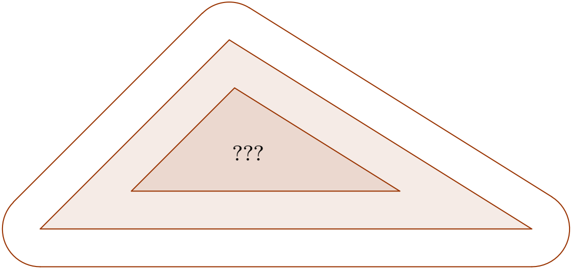
Dilatation et érosion

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^d$, $\delta, \epsilon > 0$. Le **δ-dilaté** et l'**ϵ-érodé** de S sont respectivement [Serra 83]
$S^{\oplus\delta} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, S) \leq \delta\}$ et $S^{\ominus\epsilon} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, S^{\mathsf{c}}) \geq \epsilon\}$.



Approximation à (δ, ϵ)-près

Soient $S \subseteq \mathbb{R}^d$ non vide, et $\delta, \epsilon > 0$. Un ensemble de boules $\mathcal{B}$ est une **approximation à (δ, ϵ)-près** de S si $S^{\ominus\epsilon} \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subseteq S^{\oplus\delta}$.



$\mathcal{B}_{opt}$ est une approximation **optimale** si $|\mathcal{B}_{opt}| = \min_{S^{\ominus\epsilon} \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subseteq S^{\oplus\delta}} |\mathcal{B}|$.

Plan de l'exposé

Motivations

Unions de boules

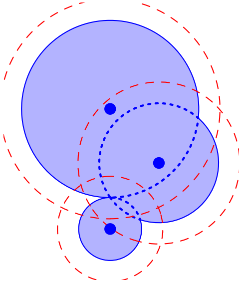
Convertir une forme en une union finie de boules
- Nuage de points $\Rightarrow$ union de boules
- Forme digitale $\Rightarrow$ union de boules
- Forme solide maillée $\Rightarrow$ union de boules
- Union de boules $\Rightarrow$ union de boules

Approximation par boules à (O, I)-près
- Définition
- Etude dans le cas union de boules $\Rightarrow$ union de boules
  - Complexité
  - Algorithme optimal

Quand S est une union de boules

Soit $\hat{\mathcal{B}}$ un ensemble de boules, et $S = \bigcup \hat{\mathcal{B}}$. Une approximation à (δ, ϵ)-près de S est une simplification de $\hat{\mathcal{B}}$.

- $S^{\oplus\delta}$ est une union finie de boules

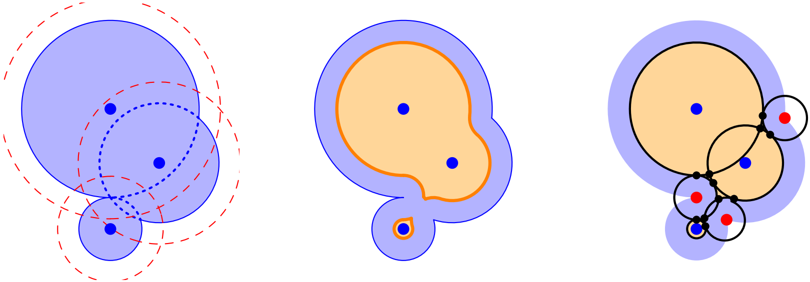


[Attali, Nguyen & Sivignon 18]

Quand S est une union de boules

Soit $\hat{\mathcal{B}}$ un ensemble de boules, et $S = \bigcup \hat{\mathcal{B}}$. Une approximation à (δ, ϵ)-près de S est une simplification de $\hat{\mathcal{B}}$.

- $S^{\oplus\delta}$ est une union finie de boules
- dans $\mathbb{R}^2$, $S^{\ominus\epsilon}$ peut être capturé par un arrangement



[Attali, Nguyen & Sivignon 18]

Plan de l'exposé

Motivations

Unions de boules

Convertir une forme en une union finie de boules
- Nuage de points $\Rightarrow$ union de boules
- Forme digitale $\Rightarrow$ union de boules
- Forme solide maillée $\Rightarrow$ union de boules
- Union de boules $\Rightarrow$ union de boules

Approximation par boules à (O, I)-près
- Définition
- Etude dans le cas union de boules $\Rightarrow$ union de boules
  - Complexité
  - Algorithme optimal

Le problème d'approximation à (δ, ϵ)-près

Problème de décision

Soit $\hat{\mathcal{B}}$ un ensemble fini de boules de centres et rayons rationnels, $S = \bigcup \hat{\mathcal{B}}$, $\delta, \epsilon > 0$ rationnels, k entier positif. Existe-t-il une approximation à (δ, ϵ)-près de S de centres et rayons rationnels et cardinal au plus k ?

Théorème [Attali, Nguyen & Sivignon 18]

Le problème d'approximation à (δ, ϵ)-près est NP-complet.

Schéma de preuve

NP

Vérifier en temps polynomial qu'un ensemble fini de boules $\mathcal{B}$ couvre $S^{\ominus\epsilon}$ et est inclu dans $S^{\oplus\delta}$ $\checkmark$

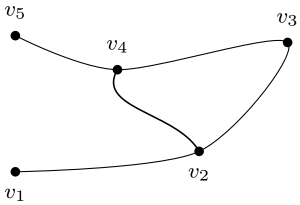
[Pach 12, Edelsbrunner et al. 92]

Au moins aussi dur que... Vertex cover

$$
\begin{array}{ccc}
\text{graphe cubique planaire} & & \\
G=(V,E) & \longrightarrow & \bigcup \hat{\mathcal{B}}_G = S \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{vertex cover } F,\ |F|=k & \Longleftrightarrow & \text{approximation à } (\delta,\epsilon)\text{-près} \\
 & & \mathcal{B},\ |\mathcal{B}| = k+L
\end{array}
$$

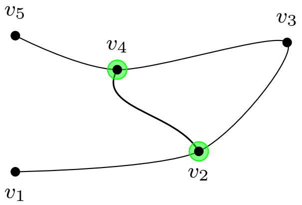
Vertex cover

Soit $G = (V, E)$ un graphe. $F \subseteq V$ est un **vertex cover** de G ssi toute arête de E est incidente à un sommet de F.



Vertex cover

Soit $G = (V, E)$ un graphe. $F \subseteq V$ est un **vertex cover** de G ssi toute arête de E est incidente à un sommet de F.



Problème

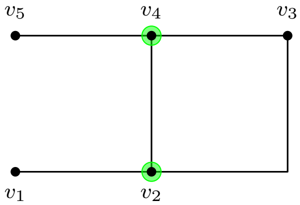
Existe-t-il un vertex cover de G de cardinal au plus k ?

Vertex cover est un problème *NP-complet*, même si G est cubique planaire.

[Garey & Jonhson 97, Calamoneri & Petreschi 95]

Vertex cover

Soit $G = (V, E)$ un graphe. $F \subseteq V$ est un **vertex cover** de G ssi toute arête de E est incidente à un sommet de F.



Problème

Existe-t-il un vertex cover de G de cardinal au plus k ?

Vertex cover est un problème *NP-complet*, même si G est cubique planaire.

[Garey & Jonhson 97, Calamoneri & Petreschi 95]

D'un graphe G à une forme S

graphe cubique planaire
$G = (V, E)$

$\downarrow$

vertex cover F

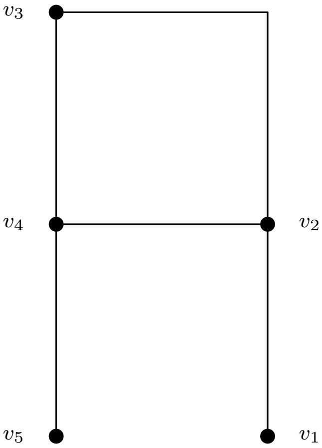
$\longrightarrow$

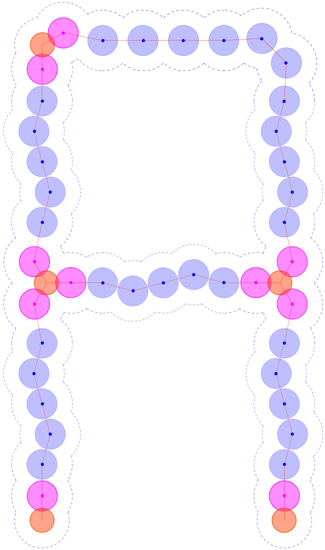
$\bigcup \hat{\mathcal{B}}_G = S$

$\downarrow$

approximation à (δ, ϵ)-près
$\mathcal{B}$

Exemple de conversion





D'un graphe G à une forme S

$$\begin{array}{ccc} \text{graphe cubique planaire} & & \\ G = (V, E) & \longrightarrow & \bigcup \hat{\mathcal{B}}_G = S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{vertex cover } F & & \text{approximation à } (\delta, \epsilon)\text{-près} \\ & & \mathcal{B} \end{array}$$

D'un graphe G à une forme S

graphe cubique planaire
$G = (V, E)$ $\longrightarrow$ $\bigcup \hat{\mathcal{B}}_G = S$

$\downarrow$ $\downarrow$

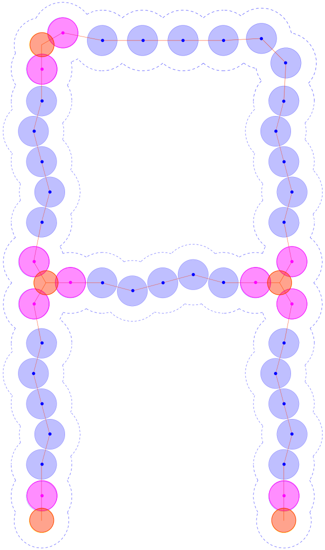
vertex cover F $\Longleftrightarrow$? approximation à (δ, ϵ)-près $\mathcal{B}$

D'un graphe G à une forme S

$$
\begin{array}{ccc}
\text{graphe cubique planaire} & & \\
G = (V, E) & \longrightarrow & \bigcup \hat{\mathcal{B}}_G = S \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{vertex cover } F,\ |F| = k & \underset{?}{\color{red}{\Longrightarrow}} & \text{approximation à } (\delta, \epsilon)\text{-près} \\
& & \mathcal{B},\ |\mathcal{B}| = k + L
\end{array}
$$

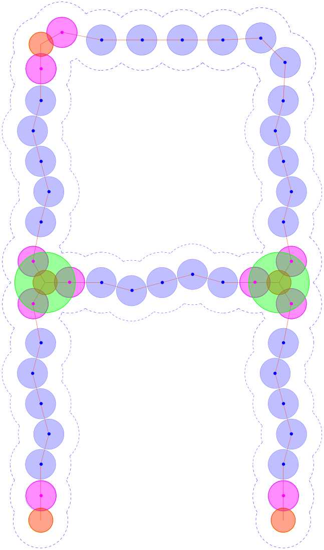
Vertex cover $F \Rightarrow$ approximation à (δ, ϵ)-près $\mathcal{B}$

- pour tout $v \in F$, choisir une boule qui couvre les centres (roses) des gadgets sommets $\rightarrow k$ boules
- compléter avec la couverture canonique de (l'érodé de) chaque arête $\rightarrow L$ boules
- ensemble de $k + L$ boules qui est une approximation à (δ, ϵ)-près



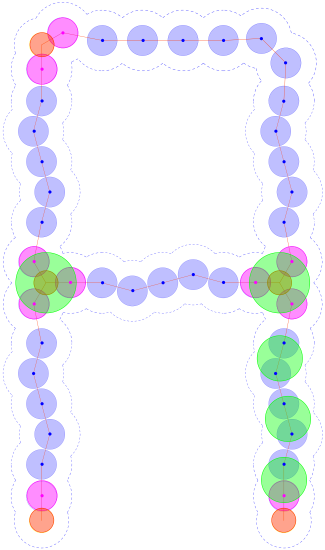
Vertex cover $F \Rightarrow$ approximation à (δ, ϵ)-près $\mathcal{B}$

- pour tout $v \in F$, choisir une boule qui couvre les centres (roses) des gadgets sommets $\rightarrow k$ boules
- compléter avec la couverture canonique de (l'érodé de) chaque arête $\rightarrow L$ boules
- ensemble de $k + L$ boules qui est une approximation à (δ, ϵ)-près



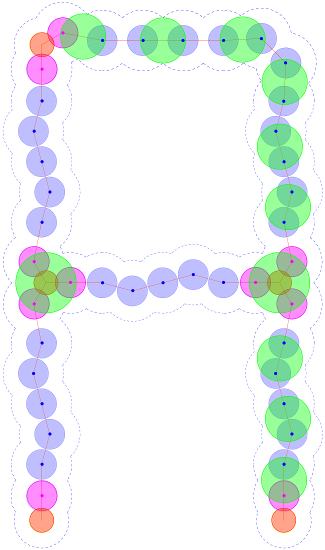
Vertex cover $F \Rightarrow$ approximation à (δ, ϵ)-près $\mathcal{B}$

- pour tout $v \in F$, choisir une boule qui couvre les centres (roses) des gadgets sommets $\rightarrow k$ boules
- compléter avec la couverture canonique de (l'érodé de) chaque arête $\rightarrow L$ boules
- ensemble de $k + L$ boules qui est une approximation à (δ, ϵ)-près



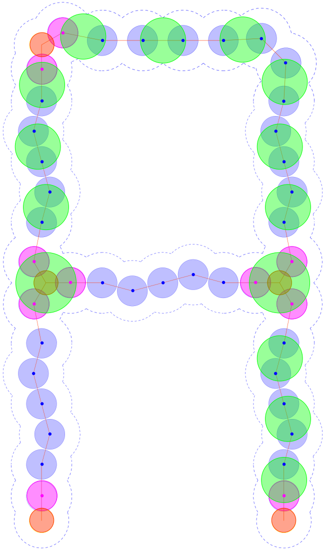
Vertex cover $F \Rightarrow$ approximation à (δ, ϵ)-près $\mathcal{B}$

- pour tout $v \in F$, choisir une boule qui couvre les centres (roses) des gadgets sommets $\to k$ boules
- compléter avec la couverture canonique de (l'érodé de) chaque arête $\to L$ boules
- ensemble de $k + L$ boules qui est une approximation à (δ, ϵ)-près



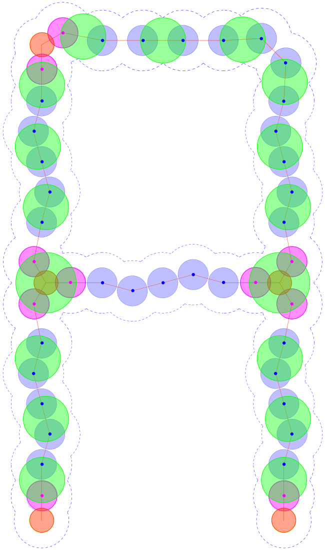
Vertex cover $F \Rightarrow$ approximation à (δ, ϵ)-près $\mathcal{B}$

- pour tout $v \in F$, choisir une boule qui couvre les centres (roses) des gadgets sommets $\rightarrow k$ boules
- compléter avec la couverture canonique de (l'érodé de) chaque arête $\rightarrow L$ boules
- ensemble de $k + L$ boules qui est une approximation à (δ, ϵ)-près



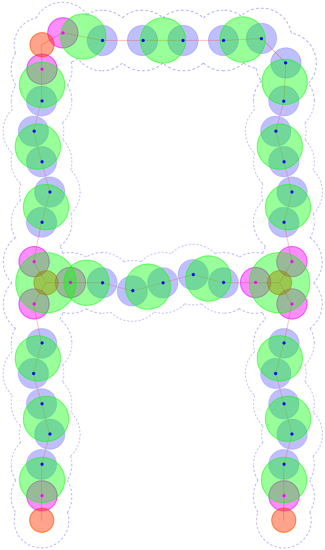
Vertex cover $F \Rightarrow$ approximation à (δ, ϵ)-près $\mathcal{B}$

- pour tout $v \in F$, choisir une boule qui couvre les centres (roses) des gadgets sommets $\rightarrow k$ boules
- compléter avec la couverture canonique de (l'érodé de) chaque arête $\rightarrow L$ boules
- ensemble de $k + L$ boules qui est une approximation à (δ, ϵ)-près



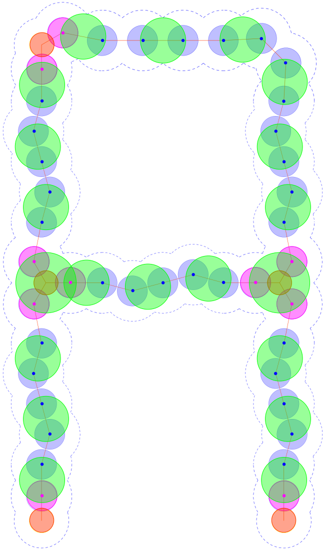
Vertex cover $F \Rightarrow$ approximation à (δ, ϵ)-près $\mathcal{B}$

- pour tout $v \in F$, choisir une boule qui couvre les centres (roses) des gadgets sommets $\rightarrow k$ boules
- compléter avec la couverture canonique de (l'érodé de) chaque arête $\rightarrow L$ boules
- ensemble de $k + L$ boules qui est une approximation à (δ, ϵ)-près



Vertex cover $F \Rightarrow$ approximation à (δ, ϵ)-près $\mathcal{B}$

- pour tout $v \in F$, choisir une boule qui couvre les centres (roses) des gadgets sommets $\to k$ boules
- compléter avec la couverture canonique de (l'érodé de) chaque arête $\to L$ boules
- ensemble de $k + L$ boules qui est une approximation à (δ, ϵ)-près



Plan de l'exposé

Motivations

Unions de boules

Convertir une forme en une union finie de boules

- Nuage de points $\Rightarrow$ union de boules
- Forme digitale $\Rightarrow$ union de boules
- Forme solide maillée $\Rightarrow$ union de boules
- Union de boules $\Rightarrow$ union de boules

Approximation par boules à (O, I)-près

- Définition
- Etude dans le cas union de boules $\Rightarrow$ union de boules
  - Complexité
  - Algorithme optimal

Résultat

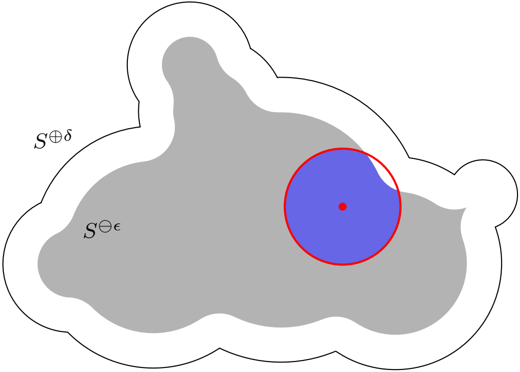
Theorem

Dans $\mathbb{R}^2$, il existe un algorithme en temps polynomial pour calculer une approximation à (δ, ϵ)-près pour des unions finies de boules $S = \bigcup \hat{\mathcal{B}}$ telles que $S^{\oplus\delta}$ est acyclique.

[Nguyen, Sivignon 17]

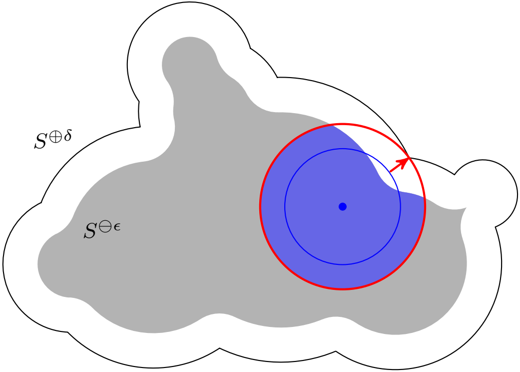
Boules médiales

On peut se contenter de considérer les boules médiales de $S^{\oplus\delta}$.



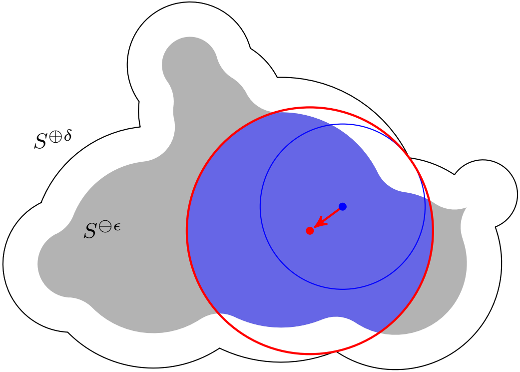
Boules médiales

On peut se contenter de considérer les boules médiales de $S^{\oplus\delta}$.



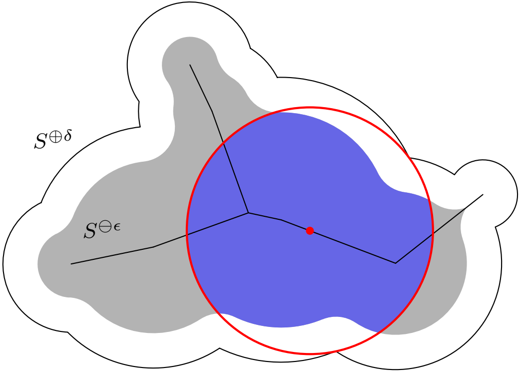
Boules médiales

On peut se contenter de considérer les boules médiales de $S^{\oplus\delta}$.



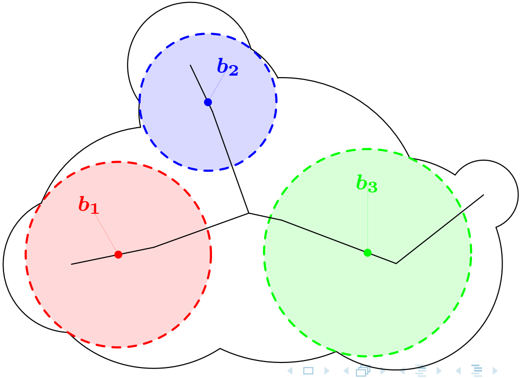
Boules médiales

On peut se contenter de considérer les boules médiales de $S^{\oplus\delta}$.



Ordre partiel sur les boules médiales

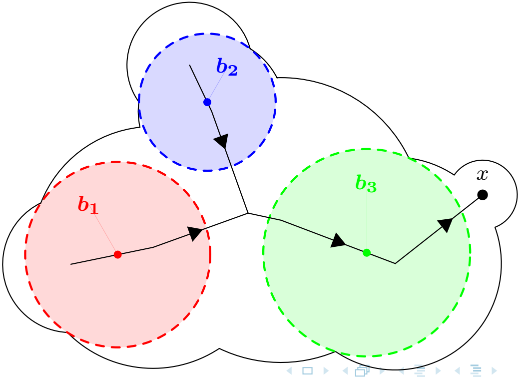
- Dans $\mathbb{R}^2$, l'axe médian d'une forme acyclique est un **arbre** [Lieutier 04]
- choisir une racine x sur cet arbre induit un ordre partiel sur les boules médiales



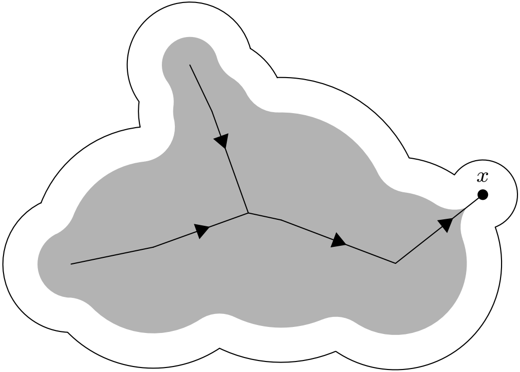
Ordre partiel sur les boules médiales

- Dans $\mathbb{R}^2$, l'axe médian d'une forme acyclique est un **arbre** [Lieutier 04]
- choisir une racine x sur cet arbre induit un ordre partiel sur les boules médiales

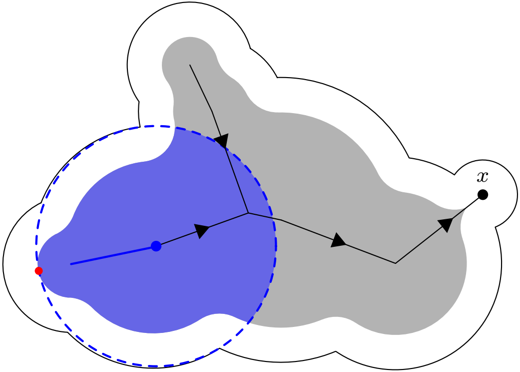
- b_1 et b_2 sont incomparables
- $b_1 \leq b_3$
- $b_2 \leq b_3$



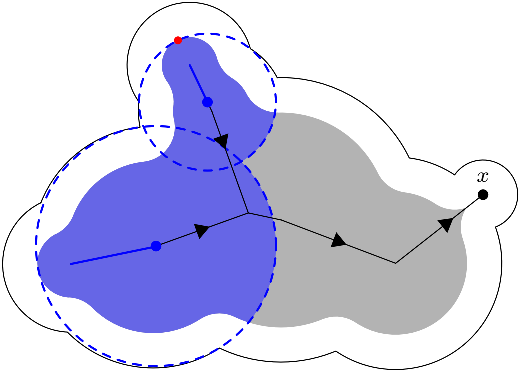
Principe de l'algorithme



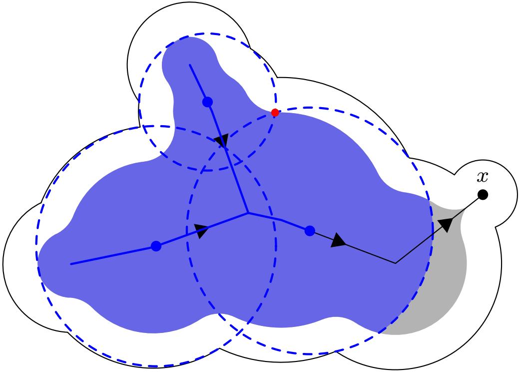
Principe de l'algorithme



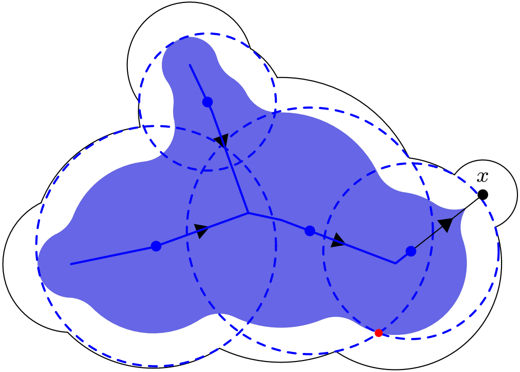
Principe de l'algorithme



Principe de l'algorithme

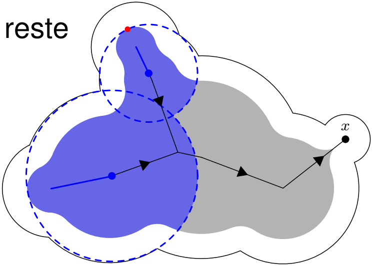


Principe de l'algorithme



Pseudocode

Entrée S, δ, ϵ tels que AM de $S^{\oplus\delta}$ est acyclique
Sortie $\mathcal{B}$, une approximation à (δ, ϵ)-près de S de cardinal minimum
$\mathcal{B} \leftarrow \emptyset$
reste $\leftarrow S^{\ominus\epsilon}$
tant que *reste* $\neq \emptyset$ **faire**
    Calculer une boule b critique pour le reste
    $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{b\}$
    reste $\leftarrow$ reste$\backslash b$
fin
Retourner $\mathcal{B}$



Pseudocode

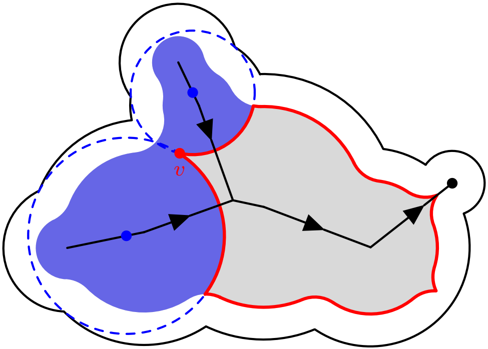
Entrée S, δ, ϵ tels que AM de $S^{\oplus\delta}$ est acyclique
Sortie $\mathcal{B}$, une approximation à (δ, ϵ)-près de S de cardinal minimum
$\mathcal{B} \leftarrow \emptyset$
reste $\leftarrow S^{\ominus\epsilon}$
tant que *reste* $\neq \emptyset$ **faire**
  invariant de boucle : reste$= S^{\ominus\epsilon} \setminus \bigcup \mathcal{B}$
  Calculer une boule b critique pour le reste
  $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{b\}$
  reste $\leftarrow$ reste$\setminus b$
fin
Retourner $\mathcal{B}$

Pseudocode

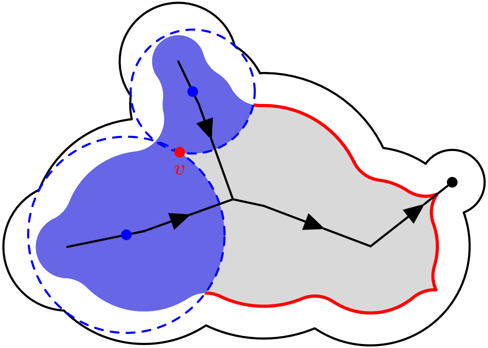
Entrée S, δ, ϵ tels que AM de $S^{\oplus\delta}$ est acyclique
Sortie $\mathcal{B}$, une approximation à (δ, ϵ)-près de S de cardinal minimum

$\mathcal{B} \leftarrow \emptyset$
reste $\leftarrow S^{\ominus\epsilon}$
tant que *reste* $\neq \emptyset$ **faire**
  invariant de boucle : reste$= S^{\ominus\epsilon} \setminus \bigcup \mathcal{B}$
  Calculer une boule b critique pour le reste
  $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{b\}$
  reste $\leftarrow$ reste$\setminus b$
fin
Retourner $\mathcal{B}$

Reste simplifié



Reste simplifié



$$A(S^{\ominus\epsilon}, \mathcal{B}) = \emptyset \iff S^{\ominus\epsilon} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$$

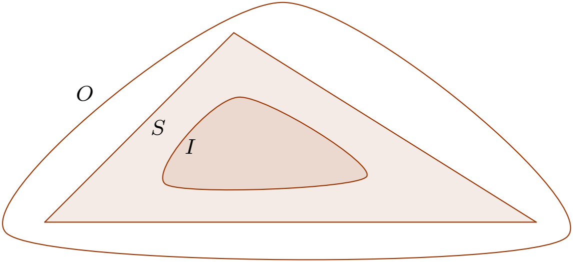
Pseudocode

Entrée S, δ, ϵ tels que AM de $S^{\oplus\delta}$ est acyclique
Sortie $\mathcal{B}$, une approximation à (δ, ϵ)-près de S de cardinal minimum

$\mathcal{B} \leftarrow \emptyset$
reste $\leftarrow A(S^{\ominus\epsilon}, \mathcal{B})$
tant que *reste* $\neq \emptyset$ **faire**
  invariant de boucle : reste$= A(S^{\ominus\epsilon}, \mathcal{B})$
  Calculer une boule b critique pour le reste
  $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{b\}$
  reste $\leftarrow A(S^{\ominus\epsilon}, \mathcal{B})$
fin
Retourner $\mathcal{B}$

$A(S^{\ominus\epsilon}, \mathcal{B})$ de taille polynomiale + autres
$\Longrightarrow$ complexité polynomiale

Retour aux approximations à (O, I)-près



Extension possible pour certaines familles de O et I

- savoir calculer l'AM de O
- savoir calculer les boules critiques pour I

Le mot de la fin

Bilan

- Un problème général, mais des sous-problèmes variés.
- Des solutions diverses, mais des outils clés : axe médian, diagramme de Voronoi, transformée en distance, diagramme de puissance

Et maintenant ?

- approximation à (O, I)-près définit un modèle général
- passer de l'étude théorique à la mise en pratique
- que peut-on faire en 3D ?

Merci !